РЕКОМЕНДОВАНО МИНИСТЕРСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова

ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО

для учителей 8 класса общеобразовательной школы

КОКШЕТАУ

УДК 371.3
ББК 74.262.21
С60

Солтан Г. Н.

С60 **Геометрия:** методическое руководство для учителей 8 класса общеобразовательной школы / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030, 2018. – 98 с.

ISBN 978-601-317-336-8

В пособии раскрываются особенности содержания курса геометрии 8 класса, предлагаются методические рекомендации по планированию учебного материала и проведению уроков геометрии, указания к решению задач и дополнительные задания для проведения уроков, а также задания для суммативного оценивания.

УДК 371.3
ББК 74.262.21

ISBN 978-601-317-336-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемые коллеги! Данное методическое руководство подготовлено в соответствии с Типовой учебной программой по предмету «Геометрия» для 7–9 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию. Основными особенностями курса геометрии 8 класса являются комплексность и многоаспектность содержания. В 7 классе изучались, по сути, лишь начала синтетической планиметрии. В 8 классе продолжается эта линия в разделе «Многоугольники. Исследование четырехугольников». Во втором разделе «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» предусмотрено изучение элементов тригонометрии, в третьем – «Площади фигур» – рассматриваются элементы теории площадей (понятие и аксиомы площади, формулы площадей многоугольников), в четвертом – «Прямоугольная система координат на плоскости» – начал аналитической геометрии. Все эти вопросы, подлежащие изучению, указаны в учебной программе, как и требования к знаниям, умениям и навыкам, которые должны приобрести учащиеся при изучении курса. Положениями этой программы следует руководствоваться в преподавании геометрии восьмиклассникам.

Основная особенность курса геометрии 8 класса состоит в том, что в процессе обучения должны быть содержательно раскрыты все методические линии, указанные в учебной программе. Это последовательное, логически упорядоченное изложение теории, систематическое изучение геометрических понятий и их свойств, измерение и нахождение величин, освоение начал тригонометрии и аналитической геометрии, функциональная подготовка, формирование пространственных представлений и геометрической интуиции у учащихся. Кроме того, в содержании курса имеются достаточно сложные теоретические вопросы. Поэтому важнейшей задачей обучения восьмиклассников геометрии является обеспечение его доступности. Этому должно способствовать повторение и в начале учебного года, и при его завершении.

Предлагаемое пособие предназначено для обучения школьников геометрии по учебнику «Геометрия. Учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы» авторов Г. Н. Солтана, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадиловой издательства «Келешек-2030», г. Кокшетау.

Данное пособие содержит несколько разделов. В первом даются разъяснения особенностей курса геометрии, учебника и электронного приложения к нему, а также методические рекомендации для организации и совершенствования процесса обучения геометрии восьмиклассников. Во втором разделе предлагается примерное планирование учебного материала, решение более сложных задач из учебника, а также разнообразный дополнительный материал. В третьем разделе даются задания для суммативного оценивания по разделам учебной программы.

В заключение отметим, что все наши предложения носят рекомендательный характер.

Желаем успехов!

Авторы

1. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В 8 КЛАССЕ

В процессе учебной деятельности учащихся при изучении геометрии происходит не только усвоение ими новых геометрических знаний, но и развитие умственных способностей. Развитые умственные способности позволяют строить различные виды деятельности по овладению новыми геометрическими знаниями, их обобщениями и углублениями. Модели процессов такой деятельности выявляются циклами и укрупненными дидактическими единицами учебного материала, отраженного в разделе учебника.

В обучении геометрии большое значение имеет познавательная активность учащихся и ее направленность на приобретение прочных знаний и индивидуальное умственное развитие. Пассивно управляемый учебный процесс, в котором преобладают репродуктивные методы передачи новых знаний, не может обеспечить качественную геометрическую подготовку учащихся, так как при этом недостаточно используются обратная связь и индивидуальные особенности обучаемых, нет гибкости в моделировании и прогнозировании учебного процесса. Познавательная активность учащихся немыслима без возбуждения интереса к предмету и творческой самостоятельности в овладении им. Устойчивые мотивы изучения геометрии могут быть подкреплены нацеленностью на достижение каждым учащимся более высоких результатов в сопоставлении с определенными эталонами. Этими эталонами могут служить достижения наиболее подготовленных по геометрии учащихся класса или способности отдельных учеников решать задачи повышенной трудности.

Активная мыслительная деятельность в изучении геометрии связана, как правило, с выполнением определенного задания. При выполнении заданий возникают проблемные ситуации. Геометрия как школьный учебный предмет сплошь насыщена учебными проблемами, поскольку при ее изучении необходимо систематически доказывать теоремы и решать задачи.

В обучении геометрии можно выделить два вида проблем: локальные и перспективные. Локальные – это такие, решение которых осуществляется на одном-двух уроках при изучении нового материала и его закреплении. Перспективные – это те, решение которых осуществляется в цикле уроков, то есть на протяжении достаточно большого промежутка учебного времени, в котором изучаются целые разделы по геометрии или повторяется учебный материал за год.

В обучении геометрии в 8 классе имеются большие возможности для увеличения доли самостоятельной работы учащихся, так как ими уже приобретены значительный познавательный опыт и базисные геометрические знания, предусмотренные учебной программой. В самостоятельной работе учащиеся овладевают различными умениями. Среди них следует выделить, во-первых, умения, направленные на фактическое усвоение программного материала, во-вторых, умения, обеспечивающие познавательную активность, в-третьих, умения, формирующие культуру учебной деятельности. Умения первой группы выполняют, в основном, информационные функции и обеспечивают усвоение новых геометрических знаний, которые в 8 классе весьма обширны и разнообразны. Умения второй группы направлены, главным образом, на умственное развитие (наблюдательность, сообразительность, последовательность и логичность мыслей, гибкость и критичность ума). Умения третьей группы формируют культуру учебной деятельности (планирование, выделение приоритетных направлений, грамотное изложение устных и письменных работ). В процессе обучения геометрии эти группы умений образуют единое целое при всей своей специфичности. Среди учебных умений по геометрии особо следует выделить практические умения выполнять построения, в том числе циркулем и линейкой.

В обучении геометрии в 8 классе можно выделить множество видов связей в размещении отдельных вопросов и небольших тем курса, которые при их последовательном изложении способствуют обеспечению его стройности, логики и единого подхода к формированию понятий, умений и навыков. Эти связи являются объединяющими и взаимодополняющими.

Учитывая особенности содержания курса геометрии 8 класса, обучение этому предмету надо организовать так, чтобы учебный материал предлагался учащимся доступными порциями, своевременно проверялись, систематизировались, обобщались их знания по крупным темам. Эти аспекты содержательно отражены в учебнике. В разделах можно выделить блоки изучения нового материала, каждый из которых ориентирован на цикл уроков:

1) комбинированный урок с повторением необходимых знаний для изучения нового материала, объяснением нового материала и его первичным закреплением;

2) урок формирования умений и навыков у учащихся по применению полученных теоретических знаний на предыдущем уроке с предварительным их контролем;

3) урок систематизации знаний по объединенным темам или разделу;

4) урок контроля знаний, умений и навыков;

5) анализ результатов, коррекция знаний.

Количество циклов может быть обусловлено учебной программой.

Раздел «Многоугольники. Исследование четырехугольников» целесообразно рассчитать на два цикла «Четырехугольники» и «Теорема Фалеса. Средние линии треугольника и трапеции».

Раздел «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» – на циклы «Теорема Пифагора. Тригонометрические функции острого угла» и «Решение прямоугольных треугольников».

Раздел «Площади фигур» целесообразно рассчитать на два цикла. Для изучения раздела «Прямоугольная система координат на плоскости» достаточно одного цикла уроков.

Завершается изучение курса повторением изученного материала, суммативным оцениванием и анализом результатов учебной деятельности за год.

В курсе геометрии 8 класса возрастают объем и сложность теоретического материала. Хотя определений понятий и теорем в нем примерно по 50, что немного больше, чем в 7 классе, их состав и внутрипредметные связи более глубоки и обширны. Например, при изучении свойств и признаков параллелограмма надо использовать свойства и признаки равенства треугольников и параллельных прямых, которые в 7 классе изучались как отдельные темы. Доступность изложения нового учебного материала улучшается, если: во-первых, хорошо выявлено основное из ранее изученного материала, необходимое для освоения нового; во-вторых, это основное своевременно актуализировано (перед изучением новой темы или в процессе ее изучения); в-третьих, новые знания конкретизируются на примерах, в которых они прежде не использовались. Содержание нового учебного материала надо излагать с учетом этого, чему в определенной мере способствует и учебник, в котором предшествующий материал связан с новым либо его напоминанием, либо обобщением, либо непосредственным включением в доказательство теоремы. Имеется также более 40 примеров решенных задач для демонстрации непосредственного применения нового теоретического материала.

Уровень подробности в изложении учебного материала надо сбалансировать так, чтобы: во-первых, учащемуся была видна последовательность логических шагов в доказательстве теоремы или решении задачи; во-вторых, отдельные шаги не должны быть чересчур мелкими или большими. Что касается введения новых понятий, то в 8 классе более предпочтителен дедуктивный путь, то есть сначала формулируется определение, а затем оно закрепляется при решении простых, а потом и несколько более сложных задач. В этом плане не надо увлекаться формированием понятия с рассмотрения большого количества упражнений, подводящих к нему. Этот прием больше используется в алгебре, так как там многие понятия вводятся путем обобщения на примерах (например, понятия уравнения, функции). Определения большинства геометрических понятий сами по себе конструктивны. Если, например, мы говорим, что трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие непараллельны, то этим самым указывается однозначно, как такую фигуру построить. На подготовительные же упражнения требуется дополнительное время. В 8 классе больше внимания можно уделить классификации понятий. Классификации понятий можно оформлять с использованием таблиц или графов, однако это необязательно, так как понятий немного.

Следует также отметить, что учебной программой предусмотрено проведение работ по суммативному оцениванию по разделам. Такие работы (СОР) предлагаются в данном пособии и составлены в четырех равноценных вариантах. В каждом варианте содержится по 4 задания, расположенных по возрастанию уровня трудности. Самостоятельные работы, предлагаемые в данном пособии и взятые из других источников или из опыта работы, должны носить в большей мере обучающий, чем контролирующий характер.

Совершенствование обучения восьмиклассников геометрии связано с реализацией преемственных связей в методической системе, включающей цели, содержание, методы, формы и средства обучения. Общие цели обучения отражены в требованиях учебной программы и конкретизируются при изучении отдельных тем. Программный материал курса геометрии 8 класса очень обширный, поэтому основное внимание следует уделить его изучению учащимися, чтобы их знания не оказались непрочными и поверхностными, а практические умения и навыки недостаточными. Кроме того, надо иметь в виду, что и в 8 классе объем материала по геометрии большой, причем при его изучении постоянно используется материал, изученный в 5–7 классах.

Предлагаемое в УМК содержание геометрического образования восьмиклассников всецело подчинено программным требованиям. В методических рекомендациях значительное внимание обращено не только на его особенности, но и на методы обучения. Учебно-методический комплекс является также и основным средством обучения. Дополнение к нему возможно и необходимо из собственного опыта преподавания геометрии. Полезно использовать исторический и практический материал, в частности, связанный с геометрией того края, где живут школьники. Это направление обозначено в шмуцтитулах к учебнику и отражено в задачах, связанных с достопримечательностями Казахстана. Учитывая огромные возможности интернет-пользования, важно также предоставлять школьникам возможность для самостоятельного пополнения геометрических знаний, особенно о геометрии в окружающем мире и истории ее развития.

Учебник снабжен электронным приложением (ЭП), полностью соответствующим программе и учебнику. Имеется также тематический сборник задач и тестовых заданий. ЭП содержит разделы «Игры», «Материалы» (рекомендации для их использования предложены во втором разделе «Примерное планирование учебного материала»). Раздел «Материалы» состоит из подразделов, соответствующих учебнику. Его материалы: презентации, озвученные фрагменты видеоуроков, тесты, самостоятельные работы, занимательные и олимпиадные задачи могут быть использованы как на уроках, так и во внеклассной работе с учащимися. Для удобства все они упорядочены по темам учебной программы.

Формы изучения геометрии разнообразные и зависят от методов преподавания и учебной деятельности учащихся. Учитывая объективную сложность геометрии как учебного предмета и насыщенность содержания школьной программы, большое внимание надо уделять совершенствованию урока – основной формы обучения. На уроках формируются геометрические знания, умения и навыки учащихся. Не следует перегружать учащихся домашними заданиями, они в большей мере предназначены для закрепления изученного и удовлетворения познавательных интересов. Объем домашних заданий должен соответствовать нормативным требованиям и рассчитан на его выполнение учеником в течение получаса (это 2–3 упражнения). Кроме того, в учебнике имеются контрольные вопросы для проверки теории (их около 100). Для того чтобы учащиеся не забывали основной теоретический материал, надо периодически повторять его.

В цикле уроков реализуются различные формы и методы обучения, особенно это касается комбинированного урока. Традиционные методы и формы обучения достаточно надежны, это объяснительно-иллюстративный метод и самостоятельная работа учащихся. Учебный материал по геометрии логически упорядоченный и целостный. Эти его особенности надо объяснять учащимся и иллюстрировать. Геометрическая теорема или новый тип задач представляют значительные проблемы, которые трудно решать учащимся, если не объясняется, как это делается. С другой стороны, если учащиеся не будут решать самостоятельно посильные проблемы, то должного качества их геометрической подготовки не будет. Поэтому именно в сочетании объяснительно-иллюстративного метода с систематической самостоятельной работой учащихся достигается хороший результат. При этом формы изучения геометрического материала направляются на активизацию познавательной деятельности учащихся. Это и групповая работа, и сочетание фронтальной с индивидуальной работой, и взаимообучение. Они весьма целесообразны в 8 классе, учитывая возросшие интеллектуальные возможности учащихся и расширение содержания обучения геометрии.

Приведем в качестве примера методическую разработку урока для повторения курса геометрии 8 класса.

Тема урока: «Основные методы решения геометрических задач»

Цели урока:

- повторить методы решения геометрических задач;
- применять их при решении задач различными способами;
- проводить наблюдения, выдвигать идеи и гипотезы, подмечать закономерности;
- овладевать терминологией геометрических методов решения задач;
- стремиться к достижению запланированных результатов учебной деятельности, адекватно их оценивать;
- приобретать навыки и умения индивидуальной и коллективной работы на уроке.

Педагогические задачи урока:

- актуализировать и систематизировать основные изученные методы решения геометрических задач (метод равных треугольников, от противного, алгебраический, метод площадей, метод координат, тригонометрический);
- продемонстрировать взаимопроникновение и взаимодополнение разных методов;
- углубить и обобщить знания учащихся по методам решения геометрических задач;
- провести дифференцированное обобщающее повторение известных методов решения геометрических задач.

Средства обучения:

1. Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан, А. Ж. Жумадилова. Геометрия: учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы + CD. – Кокшетау: Келешек-2030, 2018.
2. Настенная таблица-плакат «Методы решения геометрических задач».
3. Наборы чертежных инструментов, модели плоских и пространственных фигур.

Структура, этапы и краткое содержание учебной и педагогической деятельности

I. Актуализация опор:

а) комментируемое начало (учитель);

б) фронтальный опрос (в диалоговой форме);

в) предложение дифференцированного задания (в общем и личностно-ориентированном планах).

II. Дальнейшие углубление, систематизация и обобщение учебного материала:

а) самостоятельная работа с учебником;

б) работа в группах (с оказанием взаимопомощи и помощи учителя).

III. Фронтальная работа с учащимися:

обсуждение способов решения задач.

IV. Рефлексия:

а) подведение итогов, выделение главного;

б) самооценка, групповая оценка;

в) занимательная викторина.

V. Дифференцированное домашнее задание

Сценарий и ход урока

I. – Ребята! За прошедшее время мы с вами решили довольно много задач по геометрии. Можете прикинуть в уме, сколько самостоятельно решил каждый?

Теперь вопрос: «С использованием каких математических средств вы решали эти задачи?»

Различные ответы учащихся:

– С помощью учебника и других книг по геометрии.
– С помощью изученных теорем о свойствах и признаках фигур.
– Благодаря своим геометрическим знаниям и способностям.

– С помощью изученных формул площадей, например.

– Используя известные геометрические методы решения задач.

– Да. И все же выделим из этих ответов один – **решали задачу тем или иным методом или их совместным применением.**

Теперь давайте вспомним, какие же основные методы решения геометрических задач вы использовали.

Ответы учащихся и их дополнения.

– Подводим итог. Как видите, набралось больше пяти методов.

Демонстрируется таблица, в которой крупным шрифтом выделены методы, отмеченные в задачах урока.

– Давайте кратко опишем сущность каждого метода.

Воспроизводятся устные ответы учащихся. Например, по методу равных треугольников. Учащийся отвечает, что, используя условие задачи, он обнаруживает равные треугольники. Обнаружение треугольников проводится на основании одного из трех известных признаков равенства треугольников и, нередко, путем дополнительных построений. Затем из равных треугольников «извлекается» то, что требуется для решения задачи (равенство углов или равенство отрезков).

Попутно повторяются точные формулировки признаков равенства треугольников.

II. Работа в малых группах (по 3–4 человека), возможно выделение (при наличии) одной самой сильной группы.

Методический комментарий.

При получении задания каждой группе дается установка на самооценку каждого (значимость личного участия в поиске идей и реализации плана решения, внесенные предложения и альтернативы, овладение избранными способами решения задач и доведения их до завершенного правильного решения).

Групповая оценка – общее количество решенных задач, выносимых на защиту перед классом, выяснение кому из участников группы принадлежит «пальма первенства» на этот раз и кто, по мнению группы, безоговорочно заслуживает высшей оценки.

Созданные временные группы выполняют задания по двум вариантам:

1-й вариант – задачи 343; 345; 2-й вариант – задачи 353; 358; из учебника [1]. В качестве дополнительной для всех учащихся предлагается задача 373, а) из учебника [1].

Вариант 1

№ 343. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ градусные меры углов A и B относятся как 7 : 8, $\angle C = 150°$, а угол D меньше угла B на 20°. Найдите неизвестные углы этого четырехугольника.

№ 345. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $CO = OA$, $\angle ABO = \angle CDO$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Вариант 2

№ 353. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна к боковой стороне и лежит на биссектрисе угла при большем основании. Найдите углы трапеции.

№ 358. а) В треугольнике ABC известны AC = 20 см, AB = 11 см и высота BH = 6,6 см. Найдите высоту CD. б) В равнобедренном ΔABC с основанием AC отрезки AD и BH его высоты. Найдите CD, если BH = 9 см, $\sin A = 0{,}6$.

Дополнительное задание. № 373, а) Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на части $AD = m$, $DC = n$. Докажите, используя площади, что $\frac{AB}{m} = \frac{BC}{n}$.

III. Общее обсуждение решений задач (по истечении 20 мин).

Представители групп (5 человек из разных групп, по одному на каждую задачу) быстро готовят на разворотах школьной доски решения.

№ 343. Ученик объясняет решение задачи и подчеркивает метод (алгебраический), который использовал.

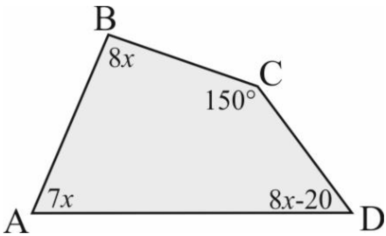


Рисунок 1

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $\angle A : \angle B = 7 : 8$, $\angle C = 150°$, $\angle D = \angle B - 20°$ (рисунок 1).

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle D$.

Краткое решение.

$7x + 8x + 150 + 8x - 20 = 360$,
$23x = 230$, $x = 10$. $\angle A = 70°$,
$\angle B = 80°$, $\angle D = 60°$.

Ответ: 70°, 80°, 60°.

Фронтальные вопросы учителя

1) – Что означает x в уравнении?

Ответ. Градусная мера одной части угла A.

2) – На основании какого свойства составлено уравнение?

Ответ. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

3) – Использовался ли алгебраический метод при решении других задач на уроке?

Ответ. Да, при решении **№ 353**.

№ 353. Ученик объясняет, как использовался алгебраический метод при решении этой задачи.

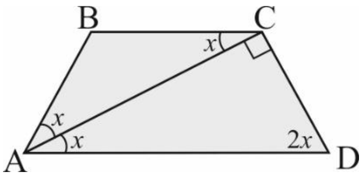


Рисунок 2

Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $AB = CD$, $AC \perp CD$, AC – биссектриса угла A (рисунок 2).

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

Краткое решение.

$x + 90 + 2x = 180$, $3x = 90$, $x = 30$.

$\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

Ответ. 60°, 120°, 120°, 60°.

Фронтальные вопросы учителя

1) – Что означает x в уравнении?

Ответ. Градусная мера половины угла A.

2) – Почему угол BCA равен x, а угол ADC – $2x$?

Ответ. $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC, $\angle ADC = \angle BAD$ как углы при основании в равнобедренной трапеции.

3) – На основании какого свойства составлено уравнение?

Ответ. Сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°, так как это односторонние углы при $BC \parallel AD$ и секущей CD.

№ 345. Ученик объясняет решение задачи (методом равных треугольников).

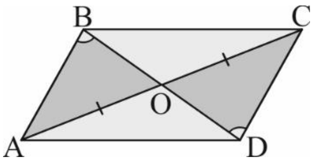


Рисунок 3

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $AC \cap BD = O$, $CO = OA$, $\angle ABO = \angle CDO$ (рисунок 3).
Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Краткая запись доказательства.

1) Так как $\angle ABO = \angle CDO$, то $AB \parallel DC$.

2) $\Delta ABO = \Delta CDO$ (по стороне и двум прилежащим углам).

$AO = OC$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, $\angle BAO = \angle DCO$, учитывая, что сумма углов треугольника равна $180°$.

3) Из равенства треугольников следует, что $AB = CD$.

4) Так как $AB \parallel DC$ и $AB = CD$, то $ABCD$ – параллелограмм.

Вопрос учителя

1) – Имеются ли другие решения?

Ответ. Можно было использовать другой признак параллелограмма. Из равенства треугольников следует, что $BO = OD$. Тогда из того, что $CO = OA$ и $BO = OD$ следует, что $ABCD$ – параллелограмм.

№ 358, а). Ученик объясняет решение задачи (методом площадей).

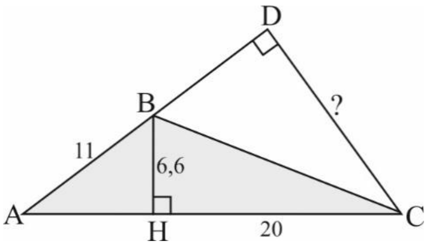


Рисунок 4

Дано: ΔABC, $AB = 11$ см, $AC = 20$ см, высота $BH = 6{,}6$ см (рисунок 4).
Найти: высоту CD.

Решение.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AB \cdot CD$.

$20 \cdot 6{,}6 = 11 \cdot CD$,

$CD = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

Вопрос учителя

1) – Изменится ли решение, если ученик построил неверный чертеж (высоту CD провел внутри треугольника)?

Ответ. Не изменится, так как решение основано на точных формулах площади, а не на использовании чертежа.

№ 358, б). Ученик объясняет решение задачи (тригонометрическим методом).

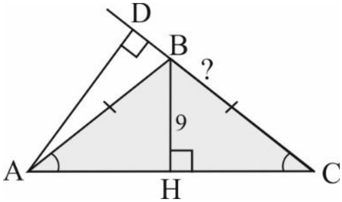


Рисунок 5

Дано: ΔABC, $AB = BC$, BH и CD – высоты, $BH = 9$ см (рисунок 5), $\sin A = 0{,}6$.

Найти: CD.

Решение.

1) Из ΔABH: $\sin A = \frac{BH}{AB}$, $AB = \frac{9}{0{,}6} = 15$ (см).

2) Так как ΔABC – равнобедренный, то $\angle A = \angle C$, следовательно $\sin A = \sin C$ и $\cos A = \cos C$ (т. к. углы A и C – острые).

3) $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$.

4) Из ΔABH: $\cos A = \frac{AH}{AB}$, $AH = 15 \cdot 0{,}8 = 12$ (см).

5) В ΔACD $AC = 24$ см, $\cos C = \frac{CD}{AC}$, $CD = 24 \cdot 0{,}8 = 19{,}2$ (см).

Ответ: 19,2 см.

Вопрос учителя

1) – Можно ли было эту задачу решить другим методом?

Ответ. Можно, например, использовать теорему Пифагора и метод площадей:

1) Из ΔABH: $\sin A = \frac{BH}{AB}$, $AB = \frac{9}{0{,}6} = 15$ (см),

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$

2) В ΔABC $AC = 24$ см. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} BC \cdot AD$.

$24 \cdot 9 = 15 \cdot AD$, $AD = 14{,}4$ (см).

3) Из ΔACD $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{24^2 - 14{,}4^2} = 19{,}2$ (см).

Ответ: 19,2 см.

Далее разобрать решение дополнительной задачи **№ 373, а)**, если есть учащиеся, которые ее решили. Если таких учащихся нет, то эта задача может быть предложена в качестве дополнительной для домашней работы. В этом случае следует дать указания: найти отношение площадей треугольников BCD и ABD, выразив их двумя разными способами (используя формулы

$S = \frac{1}{2}ah, \; S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$).

– Обсудим результаты. Задачи решены полностью. Разными способами. Давайте еще раз перечислим методы, которые использованы.

Ответ. Алгебраический. Метод равных треугольников. Метод площадей. Тригонометрический метод.

– Какие комбинации методов встречались?

Ответ. Комбинации тригонометрического и метода площадей.

IV.

Подведем итоги.

– Итак, что вы считаете главным для себя в успехе в решении задачи?

Ответы. То, что мы отмечали в начале урока. Знание методов решения задач, собственные силы и взаимовыручка.

– Достойный ответ. И все же, ребята, руководствуясь замечательным принципом «один за всех и все за одного», не забывайте о том, что спрос за знания ведется с каждого. Какую оценку каждый из вас поставил бы себе? Какие высшие оценки и кому сегодня должны быть выставлены безоговорочно?

Ответы групп.

– Так и делаем. Спасибо за помощь. Какие методы решения геометрических задач оказались сегодня наиболее востребованными? *Демонстрируется таблица.*

Ответы. 1, 3, 4, 6.

В конце урока проведем небольшую **викторину**.

1. На здании какой школы в древности была надпись: «Не знающий геометрии сюда да не входит»?

Ответ. «Академия» в Афинах.

2. Какая геометрическая теорема в старину называлась «теоремой невесты»?

Ответ. Теорема Пифагора. В средневековье в Азии. Чертеж к теореме напоминает летящую пчелу. По-древнегречески «молодая пчелка» означает «невеста», «нимфа».

V. № 343, № 345 для варианта 2, № 353, № 358 для варианта 1. Для всех – № 332 (устно).

Спасибо за урок!

2. ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА[1]

(*2 ч в неделю, всего 68 часов)*

Повторение курса геометрии 7 класса (2 ч)

Основные цели: систематизация и обобщение курса геометрии 7 класса; подготовка к изучению раздела «Многоугольники. Исследование четырехугольников».

Методические рекомендации

Повторение целесообразно осуществить в двух аспектах: 1) повторить геометрические понятия и их свойства, изученные в 7 классе; 2) закрепить умения и навыки учащихся в применении теоретических знаний при решении задач. Для этой цели в учебнике предлагаются три рубрики: в первой сгруппирован фактический материал по теории; во второй предложены вопросы по теории; в третьей даны упражнения, последовательно охватывающие курс геометрии 7 класса и расположенные по степени возрастания трудности. Приведем примеры решений некоторых задач.

З а д а ч а **№ 14**. В равнобедренном ΔABC с основанием BC $\angle A = 50°$. К его стороне AC проведен серединный перпендикуляр, пересекающий сторону AB в точке D. Найдите $\angle DCA$.

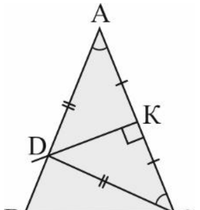


Рисунок 6

Дано: ΔABC, $AB = AC$, $\angle A = 50°$;
DK – серединный перпендикуляр к AC.

Найти: $\angle DCA$.

[1] **Примечание.** Примерное планирование дано в соответствии с долгосрочным планом по реализации учебной программы по геометрии для 8 класса, которым предусмотрено изучение разделов по четвертям.

Р е ш е н и е. 1) Так как точка D принадлежит серединному перпендикуляру к стороне AC, то она равноудалена от концов отрезка AC, то есть $DA = DC$ (рисунок 6). Значит, ΔADC – равнобедренный и $\angle DCA = \angle DAC = 50°$.

Ответ: 50°.

З а д а ч а **№ 18**. а) Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них на 50 % больше второго.

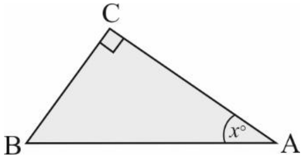


Рисунок 7

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$; $\angle B > \angle A$ на 50 % (рисунок 7).

Найти: $\angle A$, $\angle B$.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle A = x°$, тогда $\angle B = (1{,}5x)°$. Так как в прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°, составим и решим уравнение:

$x + 1{,}5x = 90$, $2{,}5x = 90$, $x = 36$. $\angle A = 36°$, $\angle B = 90° - 36° =$ $= 54°$.

Ответ: 36°, 54°.

З а д а ч а **№ 25**. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле: $r =$ $= 0{,}5(a + b - c)$, где a и b его катеты, c – гипотенуза.

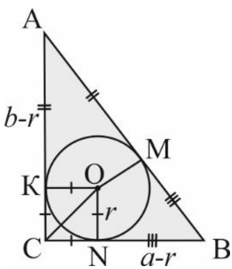


Рисунок 8

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, O – центр вписанной окружности, $ON = OK = OM = r$ (рисунок 8).

Доказать: $r = 0{,}5(a + b - c)$.

Р е ш е н и е. 1) Так как точка O принадлежит биссектрисе прямого угла C, то $\angle OCN = 45°$. Радиус ON перпендикулярен касательной CB, следовательно, ΔCON – прямоугольный и равнобедренный. $ON = CN = r$, тогда $NB = a - r$.

2) Аналогично, ΔCOK – прямоугольный и равнобедренный. $OK = CK = r$, тогда $AK = b - r$.

3) По свойству касательных, проведенных к окружности через одну точку, $AK = AM = b - r$, $BN = BM = a - r$.

4) Получили $c = (a - r) + (b - r)$, откуда $c = a + b - 2r$, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

З а д а ч а **№ 27**. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника 20 см, а радиус вписанной в него окружности 4 см. Найдите длины катетов, если больший из них равен среднему арифметическому длин меньшего катета и гипотенузы.

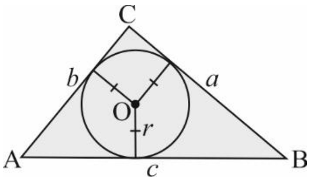


Рисунок 9

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $AB = 20$ см, $r = 4$ см (рисунок 9).

Найти: AC, BC.

Р е ш е н и е. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $a > b$. По условию задачи $a = \frac{b+20}{2}$, то есть $2a = b + 20$, $b = 2a - 20$. Учитывая, что $2r = a + b - 20$, составим и решим уравнение: $8 = a + (2a - 20) - 20$, $8 = 3a - 40$, $3a = 48$, $a = 16$; $b = 2 \cdot 16 - 20 = 12$ (см).

Ответ: 16 см, 12 см.

З а д а ч а **№ 29**. В треугольнике ABC $\angle B = 40°$. Найдите $\angle AOC$, где O – центр окружности, вписанной в треугольник.

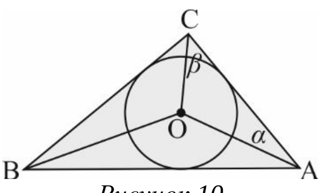


Рисунок 10

Дано: ΔABC, $\angle B = 40°$, O – центр вписанной окружности (рисунок 10).

Найти: $\angle AOC$.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle OAC = \alpha$, $\angle OCA = \beta$. Так как центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, – точка пересечения биссектрис треугольника, то $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\beta$. Зная сумму углов треугольника, запишем: $2\alpha + 2\beta + 40 = 180$. Откуда $2(\alpha + \beta) = 140$, $\alpha + \beta = 70$. Следовательно, в ΔAOC $\angle AOC = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 70° = 110°$.

Ответ: 110°.

З а д а ч а **№ 41**. На боковых сторонах равнобедренного ΔABC отмечены точки M, N и K так, что $BN = NK = KM = MC = AC$ (рисунок 11). Найдите угол B.

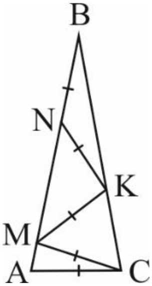


Рисунок 11

Дано: ΔABC, $AB = BC$,
$M \in AB$, $N \in AB$, $K \in BC$,
$BN = NK = KM = MC = AC$.

Найти: $\angle B$.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle MNK = 2\alpha$ как внешний угол равнобедренного ΔBNK. $\angle MKC = 3\alpha$ как внешний угол ΔBMK. $\angle AMC = 4\alpha$ как внешний угол ΔBMC. Так как ΔAMC – равнобедренный, то $\angle A = \angle AMC = 4\alpha$.

Из равнобедренного ΔABC найдем: $\angle A = \frac{180° - \alpha}{2}$. Составим и решим уравнение: $4\alpha = \frac{180 - \alpha}{2}$, $8\alpha = 180 - \alpha$, $9\alpha = 180$, $\alpha = 20$.

Ответ: $\angle B = 20°$.

Многоугольники.
Исследование четырехугольников (14 ч)

Многоугольник. Сумма углов многоугольника (8.1.1.1, 8.1.1.2)[2] – **1** ч.

Виды четырехугольников. Параллелограмм, его свойства и признаки (8.1.1.3, 8.1.1.4, 8.1.1.5) – **2** ч.

Свойства и признаки прямоугольника, ромба и квадрата (8.1.1.6) – **2** ч.

Решение задач по теме «Параллелограмм, его свойства и признаки», проверочная работа (8.1.1.3, 8.1.1.4, 8.1.1.5, 8.1.1.6) – **1** ч.

Свойства и признаки трапеции (8.1.1.11) – **1** ч.

Теорема Фалеса, пропорциональные отрезки (8.1.1.7, 8.1.1.8, 8.1.1.9, 8.1.1.10) – **1** ч.

Средняя линия треугольника и трапеции (8.1.1.12, 8.1.1.13) – **1** ч.

Решение задач по теме «Трапеция. Средняя линия треугольника и трапеции», проверочная работа (8.1.1.11, 8.1.1.12, 8.1.1.13) – **1** ч.

Замечательные точки треугольника (8.1.3.1) – **1** ч.

Решение задач по теме «Многоугольники. Исследование четырехугольников» (8.1.1.1 – 8.1.1.13, 8.1.3.1) – **1** ч.

СОР «Многоугольники. Исследование четырехугольников» – **1** ч.

Итоговый урок – **1** ч.

Основные цели: систематизация и расширение знаний учащихся о четырехугольниках и их видах; изучение теоремы Фалеса, свойств средних линий треугольника и трапеции.

Методические рекомендации

Многоугольник определяется через понятие простой замкнутой ломаной, а четырехугольник – как вид многоугольника. Существенным в этом разделе является введение понятия выпуклого и невыпуклого многоугольника. В школьном курсе планиметрии преимущественно изучаются выпуклые много-

[2] **Примечание.** В скобках указаны коды целей учебной программы.

угольники, поэтому слово «выпуклый» не используется, если иное не предусмотрено. В то же время иногда надо обращать внимание на невыпуклые четырехугольники, хотя бы по той причине, что их модели широко используются на производстве, в архитектуре, наблюдаются в окружающем мире. Теория невыпуклых многоугольников не изучается в школьной планиметрии по следующим основным причинам. Во-первых, она далеко не всегда аналогична теории выпуклых многоугольников. При одновременном изучении свойств выпуклых и невыпуклых многоугольников постоянно возникают противоречия, так как то или иное свойство может быть верным для одних из них, но неверным для других. Во-вторых, широкое включение невыпуклых четырехугольников было бы перегрузкой учебной программы. Любой невыпуклый многоугольник может быть составлен из треугольников или других выпуклых многоугольников. Поэтому при изучении данной темы всегда имеется возможность такого использования невыпуклых многоугольников.

Проводится классификация четырехугольников. Изучаются свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции. Этот учебный материал не вызывает особых трудностей у учащихся, так как в нем широко используются знания, полученные в 7 классе (например, признаки равенства треугольников и параллельности прямых, свойства равнобедренного треугольника).

Полезно также рассматривать задачи на исследование свойств четырехугольников на физических моделях прямой призмы и пирамиды. Это будет способствовать формированию пространственных представлений у учащихся.

В этом разделе имеются весьма важные в теоретическом и практическом планах вопросы, связанные с теоремой Фалеса и ее применением, средними линиями треугольника и трапеции, замечательными точками треугольника. Эти вопросы рассматриваются в отдельном цикле уроков. Кроме того, некоторые из них объективно трудны для учащихся. Например, доказательства теоремы Фалеса и свойств медиан треугольника, прямых, содержащих высоты треугольника.

При изучении этого раздела, как и в 7 классе, большое значение имеют взаимно обратные теоремы (признаки и свойства четырехугольников разных видов). В элементарной геометрии имеются интересные цепочки задач на этот вопрос, например, доказательство разнообразных признаков равнобедренного треугольника. Доказательство признака равнобедренного треугольника по равенству двух высот было рассмотрено в курсе геометрии 7 класса. В данном разделе после изучения пункта «Замечательные точки треугольника» можно доказать, что треугольник равнобедренный, если две его медианы равны. Приведем это доказательство.

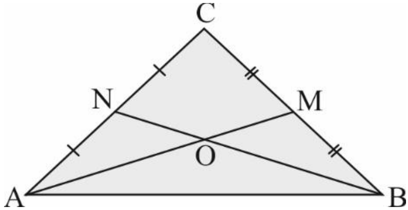


Рисунок 12

Дано: ΔABC, AM и BN – медианы, $AM = BN$ (рисунок 12).

Доказать: ΔABC – равнобедренный.

Пусть в ΔABC медианы AM и BN равны. Обозначим точку O их пересечения. Тогда по свойству медиан треугольника с учетом условия задачи получаем $AO = BO$ (так как $\frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}BN$). Следовательно, ΔAOB равнобедренный и $\angle MAB = \angle NBA$. Тогда $\Delta ABM = \Delta BAN$ (по двум сторонам и углу между ними) и $\angle CAB =$ $= \angle CBA$. Следовательно, ΔABC равнобедренный, так как два его угла равны.

При решении таких задач хорошо повторяется и используется теория курса геометрии 7 класса.

Вслед за решением этой задачи наиболее подготовленным учащимся можно предложить доказать, что треугольник равнобедренный, если две его биссектрисы равны. Эта задача трудная, однако для ее решения достаточно знать лишь программный материал (доказательство от противного и известные геометрические неравенства). Приведем это доказательство.

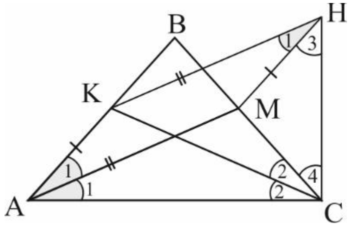


Рисунок 13

Дано: ΔABC, AM и CK – биссектрисы,
$AM = CK$ (рисунок 13).

Доказать: ΔABC – равнобедренный.

Пусть в ΔABC биссектрисы AM и CK равны. Допустим, что $\angle BCA > \angle BAC$, тогда $\angle 2 > \angle 1$, $AK > CM$ (в треугольниках с двумя соответственно равными сторонами против большего угла между ними лежит большая сторона). Проведем отрезок KH, параллельный и равный отрезку AM. Тогда ΔHKC равнобедренный и $\angle KHM = \angle 1$ (по свойству углов параллелограмма). Имеем: $\angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 2$. Следовательно, $\angle 3 > \angle 4$, так как по предположению $\angle 2 > \angle 1$. Но в ΔHMC $\angle 4 > \angle 3$, так как лежит против большей стороны HM. Получили противоречие – значит, наше допущение неверно, следовательно, $\angle BCA = \angle BAC$ и $AB = BC$.

Геометрические неравенства относятся к одним из наиболее сложных вопросов школьной планиметрии. Однако и им надо уделять определенное внимание хотя бы потому, что: во-первых, они имеются в учебной программе и все программные вопросы должны изучаться не поверхностно, а основательно; во-вторых, при решении таких задач глубже реализуются межпредметные связи с алгеброй (в данном случае с неравенствами).

Рекомендации по использованию ЭП
(электронного приложения к учебнику)

№	**Название файла**	**Краткое содержание**	**Применение**
1.	Многоугольник. Выпуклый многоугольник	Рассматриваются понятия многоугольника и его элементов с иллюстрацией на динамических рисунках.	п. 1
2.	Многоугольник. Сумма углов многоугольника	Задания по теме «Многоугольник. Сумма углов многоугольника». Раздаточный материал.	п. 1

3.	Многоугольник. Задания	Упражнения на нахождение суммы углов многоугольника и числа его диагоналей на динамических рисунках для устного решения. Самостоятельная работа в двух вариантах с отсроченной проверкой ответов для самоконтроля.	п. 1
4.	Многоугольники. Часть 1	Прямые и обратные задачи на применение формулы суммы углов многоугольника (с отсроченными решениями). Вопросы на повторение изученных понятий.	п. 1
5.	Многоугольники. Часть 2	Устные упражнения на готовых чертежах на закрепление понятий многоугольника, его элементов, нахождение периметра.	п. 1
6.	Многоугольники	Видеофайл с объяснением свойств многоугольника.	п. 1
7.	Многоугольники	Видеофайл по обучению решению задач на использование свойств многоугольника и суммы его углов.	п. 1
8.	Свойства параллелограмма	Задания по теме «Свойства параллелограмма». Раздаточный материал.	п. 2
9.	Параллелограмм и трапеция	Видеофайл с объяснением определения параллелограмма и его свойств.	п. 2
10.	Свойства прямоугольника	Задания по теме «Свойства прямоугольника». Раздаточный материал.	п. 4
11.	Свойства ромба	Задания по теме «Свойства ромба». Раздаточный материал.	п. 5
12.	Задачи	Задачи на готовых чертежах на применение свойств параллелограмма и ромба.	п. 5
13.	Прямоугольник, ромб и квадрат	Видеофайл по обучению решению задач на использование свойств прямоугольника, ромба и квадрата.	п. 6
14.	Свойства трапеции	Задания по теме «Свойства трапеции». Раздаточный материал.	п. 7
15.	Четырехугольники. Дополнительные задачи	Видеофайл с объяснением решения задач на комплексное использование многоугольников различных видов.	п. 8

16.	Теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках	Задания по теме «Теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках». Раздаточный материал.	п. 9
17.	Средняя линия треугольника	Задания по теме «Средняя линия треугольника». Раздаточный материал.	п. 10
18.	Средняя линия трапеции	Задания по теме «Средняя линия трапеции». Раздаточный материал.	п. 11
19.	Четырехугольники. Задачи повышенной трудности	Видеофайл с объяснением решения задач на исследование свойств многоугольников с дополнительными построениями.	п. 13
20.	Тестовые задания по разделу «Многоугольники. Исследование четырехугольников»	Задания трех видов: 1) *выберите верный ответ*; 2) *выберите верные утверждения;* 3) *заполните пропуски.*	п. 13

Указания к решению задач и дополнительные задания

К пункту 1. «Многоугольник. Сумма углов многоугольника»

1. Постройте две пересекающиеся прямые. Обозначьте на них 4 точки так, чтобы, соединив их: а) можно получить четырехугольник; б) нельзя получить четырехугольник.
2. В четырехугольнике *ABCD* проведена диагональ *AC*, углы *DAC* и *BCA* равны. Есть ли параллельные стороны в этом четырехугольнике?
3. Есть ли параллельные стороны в четырехугольнике *EFPK*, изображенном на рисунке 14? Можно ли указать длины его сторон *EF* и *EK*?

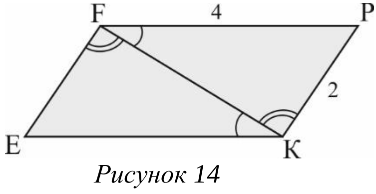


Рисунок 14

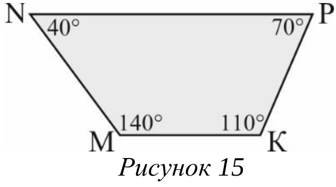


Рисунок 15

4. Известны углы четырехугольника $MNPK$ (рисунок 15). Докажите, что его стороны MK и NP параллельны, а стороны MN и KP не параллельны.

К пункту 2. «Виды четырехугольников. Параллелограмм и его свойства»

З а д а ч а **№ 53**. В параллелограмме $ABCD$ $BC : AB = 1 : 2$. Середина M стороны AB соединена отрезками с вершинами C и D. Докажите, что $\angle CMD$ равен 90°.

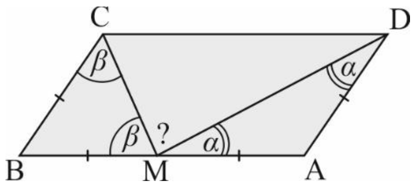


Рисунок 16

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (рисунок 16),
$BC : AB = 1 : 2$.

Доказать: $\angle CMD = 90°$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) В параллелограмме противоположные стороны равны, то есть $BC = AD$. Так как по условию $BC : AB = 1 : 2$, а точка M – середина AB, то $BC = BM = MA = AD$. Следовательно, треугольники BCM и ADM равнобедренные.

2) Пусть углы при основании в ΔBCM равны β, а углы при основании в ΔADM равны α. Тогда $\angle B = 180° - 2\beta$, $\angle A = 180° -$ $- 2\alpha$ (по свойству суммы углов треугольника); $\angle B + \angle A =$ $360° - 2(\alpha + \beta)$.

3) С другой стороны $\angle B + \angle A = 180°$ по свойству односторонних углов при параллельных прямых BC, AD и секущей AB.

4) Из равенства $360° - 2(\alpha + \beta) = 180°$ найдем: $\alpha + \beta = 90°$.

5) Учитывая, что углы α, β и CMD составляют развернутый угол AMB, получим: $\angle CMD = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$.

К пункту 3. «Признаки параллелограмма»

1. Верно ли, что если диагональ BD делит четырехугольник $ABCD$ на два равных треугольника, то $ABCD$ – параллелограмм?

[Нет, приведите пример]

2. В четырехугольнике $MCPK$ диагонали пересекаются в точке O, а треугольники MCO и KPO равны. Является ли данный четырехугольник параллелограммом?

[Нет, приведите пример]

3. В четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и диагональ AC перпендикулярна сторонам AD и BC. Является ли данный четырехугольник параллелограммом?

[Является]

К пункту 4. «Свойства и признаки прямоугольника»

З а д а ч а **№ 75**. а) В прямоугольнике $ABCD$ проведен перпендикуляр BH к диагонали AC, который делит угол B в отношении 4 : 5. Найдите угол HBD.

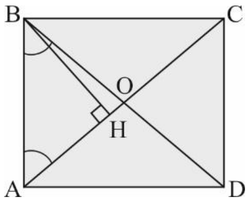


Рисунок 17

Дано: $ABCD$ – прямоугольник (рисунок 17),
O – точка пересечения диагоналей,
$BH \perp AC$, $\angle ABH : \angle HBC = 4 : 5$.

Найти: $\angle HBD$.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $\angle ABH = 4\alpha$, $\angle HBC = 5\alpha$. Так как $\angle B =$ $= 90°$, то

$$4\alpha + 5\alpha = 90,\ 9\alpha = 90,\ \alpha = 10;\ \angle ABH = 4\alpha = 40°.$$

2) В прямоугольном ΔABH $\angle BAH = 90° - \angle ABH = 50°$.

3) Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам ($AO = BO$), то ΔABO равнобедренный, следовательно, $\angle OAB = \angle ABO = 50°$.

4) $\angle HBO = \angle ABO - \angle ABH = 50° - 40° = 10°$.

Ответ: 10°.

К пункту 5. «Свойства и признаки ромба»

З а д а ч а **№ 79**. а) Сторона DC ромба $ABCD$ образует с продолжениями его диагоналей BD и AC за точки D и C углы FDC и ECD соответственно, которые относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.

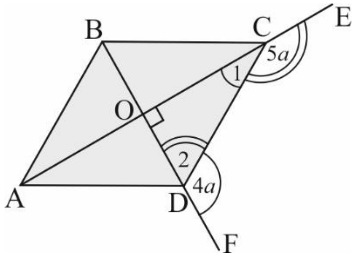


Рисунок 18

Дано: $ABCD$ – ромб (рисунок 18),
$\angle FDC : \angle ECD = 4 : 5$.

Найти: углы ромба.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle FDC = 4\alpha$, $\angle ECD = 5\alpha$. Обозначим $\angle OCD = \angle 1$, $\angle ODC = \angle 2$. Тогда по свойству внешнего угла ΔOCD:

$$4\alpha = 90° + \angle 1,\ 5\alpha = 90° + \angle 2.$$

Сложив левые и правые части этих равенств, получим $9\alpha = 180° + \angle 1 + \angle 2$.

Так как $\angle 1 + \angle 2 = 90°$ по свойству острых углов прямоугольного ΔOCD, то $9\alpha = 270°$, $\alpha = 30°$. Следовательно, $4\alpha = 120°$, $5\alpha = 150°$; $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 60°$. Найдем углы ромба: $\angle A = \angle C = 2\angle 1 = 60°$, $\angle B = \angle D = 2\angle 2 = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

Проверочная работа «Параллелограмм, его свойства и признаки»

Вариант 1

1. В прямоугольнике $MNPQ$ диагонали пересекаются в точке O, $\angle NOP = 120°$, $MP = 8$ см. Найдите периметр треугольника MNO.
2. В ромбе $ABCD$ на сторонах AD и BC отмечены точки M и N соответственно так, что прямая MN параллельна стороне AB. Определите вид четырехугольника $MNCD$. Ответ обоснуйте.
3. Постройте с помощью циркуля и линейки квадрат по его диагонали.

Вариант 2

1. В прямоугольнике $EFKL$ диагонали пересекаются в точке O, $\angle EOF = 60°$, $EF = 4$ см, $FK = 6$ см. Найдите периметр треугольника EOL.

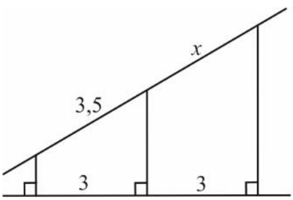
2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, на сторонах AB и AD отмечены точки M и N соответственно так, что $OM \parallel BC$, $ON \parallel CD$. Определите вид четырехугольника $AMON$. Ответ обоснуйте.
3. Постройте с помощью циркуля и линейки ромб по стороне и одной диагонали.

К пункту 7. «Свойства и признаки трапеции»

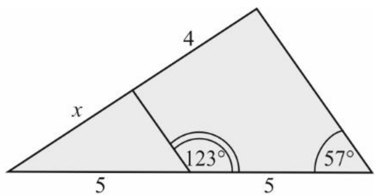
1. Стороны угла ABC пересечены двумя прямыми MN и PK (точки M и K лежат на луче BC, а точки N и P – на луче BA) так, что $\angle BMN = \angle BKP$. Докажите, что четырехугольник $MNPK$ – трапеция.
2. Через середину K боковой стороны AB трапеции $ABCD$ проведена прямая KP, параллельная основанию AD ($P \in CD$). Установите вид четырехугольника $KBCP$.
3. Углы при основании трапеции равны 45° и 65°. Найдите остальные углы трапеции.
4. Сумма углов, прилежащих к одной стороне равнобедренной трапеции, равна 130°. Найдите углы этой трапеции.
5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с большим основанием AD и углом B, равным 135°, проведены высоты BH и CK, причем $AH = HK = KD$. Докажите, что $HBCK$ – квадрат.

К пункту 9. «Теорема Фалеса»

1. Найдите длину отрезка, обозначенного на чертеже x (рисунок 19, *а*, *б*).



а



б

Рисунок 19

2. Отрезок MN разделен на 4 равные части (рисунок 20). Чему равно отношение отрезков: а) $MA : AN$; б) $MC : CN$?

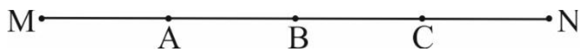


Рисунок 20

3. На сколько равных частей надо разделить отрезок AB, чтобы отметить на нем точку X, которая делит отрезок в отношении: а) 1 : 2; б) 2 : 3?
4. Данный отрезок разделите на три части в отношении 1 : 2 : 3.

З а д а ч а **№ 108**. а) Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей равнобедренной трапеции, образует с равными сторонами равные углы.

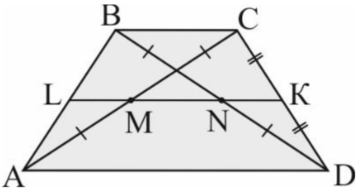


Рисунок 21

Дано: $ABCD$ – трапеция (рисунок 21),
$AB = CD$, $AM = MC$, $BN = ND$,
$MN \cap AB = L$, $MN \cap CD = K$.

Доказать: $\angle BLM = \angle CKN$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Через точку M – середину диагонали AC проведем прямую MK, параллельную AD ($K \in CD$).

2) Рассмотрим угол ACD. Так как $CM = MA$ и $MK \parallel AD$, то по теореме Фалеса $CK = KD$.

3) Рассмотрим угол CDB. Так как $CK = KD$ и $MK \parallel BC$, то $DN = NB$. То есть прямая MK пересекает диагональ BD в ее середине – точке N.

4) Так как через две точки M и N можно провести только одну прямую, а $MK \parallel AD$, то $MN \parallel AD$.

5) Пусть MN пересекает AB в точке L. Тогда $\angle L = \angle A$, $\angle K = \angle D$ как соответственные при параллельных прямых AD, MN и секущих AB и CD.

6) Так как в равнобедренной трапеции $\angle A = \angle D$, то и $\angle L = \angle K$.

К пункту 10. «Средняя линия треугольника»

1. Докажите, что средняя линия MN треугольника ABC делит высоту BH пополам (рисунок 22).

2. MN – средняя линия ΔABC, $\angle AMN = 53°$ (рисунок 23). Чему равен $\angle ACB$?

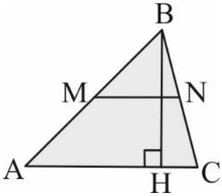


Рисунок 22

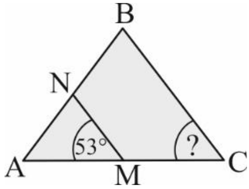


Рисунок 23

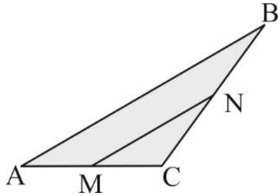


Рисунок 24

3. Дан ΔABC и его средняя линия MN (рисунок 24). Как с помощью только циркуля построить середину стороны AB?
4. Из середин A и B боковых сторон равнобедренного треугольника проведены перпендикуляры AD и BC к его основанию. Определите вид четырехугольника $ABCD$ и найдите его периметр, если основание треугольника равно 16 см, а высота – 6 см.
5. В равностороннем треугольнике со стороной 8 см проведен отрезок, соединяющий середины двух сторон. Определите вид получившегося при этом четырехугольника и найдите его периметр.
6. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.

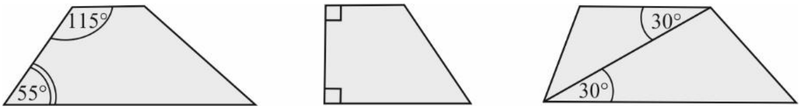
К пункту 11. «Средняя линия трапеции»

1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, а сторона AB равна диагонали AC. Найдите среднюю линию трапеции, если $BC = 16$ см.
2. Боковая сторона равнобедренного треугольника разделена на 4 равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основанию. Найдите длины отрезков этих прямых, заключенные между боковыми сторонами треугольника, если его основание равно 24 см.
3. В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит среднюю линию на части 7 см и 10 см. Найдите периметр этой трапеции.

Проверочная работа по теме «Трапеция. Средняя линия треугольника и трапеции»

Вариант 1

1. Укажите, на каких из рисунков 25, *а, б, в* четырехугольник является трапецией.



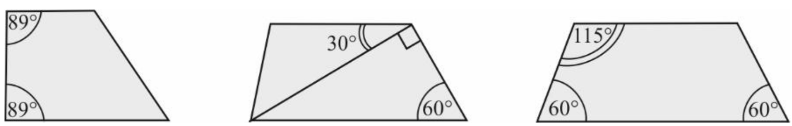
а *б* *в*

Рисунок 25

2. В трапеции $ABCD$ AD – большее основание, $AD = 8$ см, $BC = 2$ см. Через точку C проведена прямая CF, параллельная стороне AB ($F \in AD$). Найдите среднюю линию ΔCDF, параллельную DF.
3. В параллелограмме $MNPK$ биссектриса NL угла N делит сторону MK на отрезки $ML = 4$ см, $LK = 2$ см. Найдите: а) среднюю линию трапеции $NPKL$; б) периметр параллелограмма $MNPK$.

Вариант 2

1. Укажите, на каких из рисунков 26, *а, б, в* четырехугольник является трапецией.



а *б* *в*

Рисунок 26

2. В трапеции $ABCD$ AD – большее основание, $AD = 12$ см, $BC = 4$ см. Через точку B проведена прямая BK, параллельная стороне CD ($K \in AD$). Найдите среднюю линию ΔABK, параллельную AK.
3. В прямоугольнике $CDEF$ биссектриса CN угла C делит сторону DE на отрезки $DN = 5$ см, $NE = 2$ см. Найдите:

а) среднюю линию трапеции $CNEF$; б) периметр прямоугольника $CDEF$.

К пункту 12. «Замечательные точки треугольника»

1. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 1 см. Чему равен радиус описанной около него окружности?
2. В тупоугольном треугольнике ABC с тупым углом C проведены его высоты CD и BH. Как с помощью одной лишь линейки построить прямую AM, перпендикулярную BC?
3. Установите вид треугольника, если две из его вершин и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника (14 ч)

Косинус острого угла (8.1.3.2) – **1** ч.

Теорема Пифагора и теорема, обратная ей (8.1.3.3, 8.1.3.4) – **2** ч.

Тригонометрические функции острого угла (8.1.3.2) – **2** ч.

Решение задач по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника», проверочная работа (8.1.3.2 – 8.1.3.4) – **1** ч.

Свойства тригонометрических функций острого угла (8.1.3.4, 8.1.3.23) – **1** ч.

Тригонометрические тождества (8.1.3.21, 8.1.3.22, 8.1.3.24) – **1** ч.

Решение прямоугольных треугольников (8.1.3.7, 8.1.3.8) – **3** ч.

Решение задач по теме «Решение прямоугольных треугольников», проверочная работа (8.1.3.2 – 8.1.3.8, 8.1.3.21 – 8.1.3.24) – **1** ч.

СОР «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» (1 ч)

Итоговый урок (1 ч)

Основные цели: введение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла; формирование умений и навыков решения прямоугольных треугольников с использованием элементов тригонометрии.

Методические рекомендации

Вводятся понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника. Рассматривается основное тригонометрическое тождество и следствие из него. Изучаются формулы приведения:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

где α – острый угол. Исследуется изменение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла в зависимости от изменения угла.

Включение в учебную программу по геометрии 8 класса тригонометрических соотношений между сторонами и углами прямоугольного треугольника имеет большое значение, как для развития этого вопроса в школьной планиметрии, так и для дальнейшего ее изложения.

Теорема о пропорциональных отрезках используется для определения понятия косинуса острого угла прямоугольного треугольника. Далее понятие косинуса острого угла позволяет просто доказать теорему Пифагора. Эта замечательная теорема находит широкое применение в школьной математике, в частности, с ее использованием вводятся остальные тригонометрические функции острого угла.

Следует отметить, что при изучении этого раздела формируется еще один из важных методов решения геометрических задач – тригонометрический (хотя в явном виде это название не вводится). Тригонометрическим методом, например, доказана теорема Пифагора. Приведем еще пример использования этого метода.

З а д а ч а. Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, является средним пропорциональным между отрезками, на которые она делит его гипотенузу.

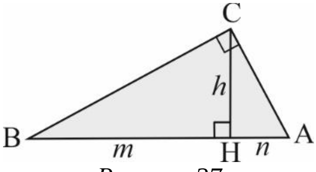


Рисунок 27

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $CH \perp AB$, $CH = h$, $BH = m$, $HA = n$ (рисунок 27).

Доказать: $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$.

Доказательство. Докажем, что $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$, т. е. $h^2 = mn$. Из прямоугольного ΔAHC имеем: $h = n \cdot \operatorname{tg} A$, а из ΔBHC – $h = m \cdot \operatorname{tg}(90° – A) = m \cdot \operatorname{ctg} A$. Тогда $h^2 = mn \cdot \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = mn$.

Рекомендации по использованию ЭП

№	Название файла	Краткое содержание	Применение
1.	Косинус острого угла прямоугольного треугольника	Определение понятия косинуса острого угла прямоугольного треугольника. Закрепление понятия на примерах решения простейших задач на готовых чертежах и контрольных вопросах.	п. 14
2.	Косинус острого угла прямоугольного треугольника	Задачи с решениями на использование понятия косинуса острого угла.	п. 14
3.	Прямоугольные треугольники. Часть 1	Видеофайл на повторение свойств и признаков равенства прямоугольных треугольников. Решение задачи физического содержания на использование свойств прямоугольного треугольника с объяснением ее практического применения.	п. 15
4.	Прямоугольные треугольники. Часть 2	Видеофайл с объяснением решений задач на применение свойств прямоугольного треугольника (для повторения).	п. 15
5.	Теорема Пифагора. Часть 1	Видеофайл с доказательством теоремы Пифагора методом площадей.	п. 15
6.	Теорема Пифагора. Часть 2	Видеофайл с объяснением решений задач на применение теоремы Пифагора.	п. 15

7.	Теорема Пифагора. Часть 1	Задания по теме «Теорема Пифагора». Раздаточный материал.	п. 15
8.	Теорема Пифагора. Часть 2	Задания по теме «Теорема Пифагора». Раздаточный материал.	п. 15
9.	Теорема Пифагора. Часть 3	Задания по теме «Теорема Пифагора». Раздаточный материал.	п. 15
10.	Тригонометрические функции острого угла. Часть 1	Задания по теме «Тригонометрические функции острого угла». Раздаточный материал.	п. 16
11.	Тригонометрические функции острого угла. Часть 2	Задания по теме «Тригонометрические функции острого угла». Раздаточный материал.	п. 17
12.	Тригонометрические функции острого угла. Часть 3	Задания по теме «Тригонометрические функции острого угла». Раздаточный материал.	п. 17
13.	Тригонометрические тождества	Видеофайл с объяснением решений задач на доказательство и применение тригонометрических тождеств.	п. 18
14.	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника	Видеофайл с доказательством основного тригонометрического тождества и объяснением решений задач на применение тригонометрических функций острого угла (в том числе на решение прямоугольных треугольников).	п. 19
15.	Решение прямоугольного треугольника. Часть 1	Задания по теме «Решение прямоугольного треугольника». Раздаточный материал.	п. 19
16.	Решение прямоугольного треугольника. Часть 2	Задания по теме «Решение прямоугольного треугольника». Раздаточный материал.	п. 19
17.	Это интересно	Исторические сведения о теореме Пифагора.	п. 15, 20

18.	Тестовые задания по разделу «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»	Задания трех видов: 1) *выберите верный ответ*; 2) *выберите верные утверждения;* 3) *заполните пропуски.*	п. 20

Указания к решению задач и дополнительные задания

К пункту 14. «Косинус острого угла»

1. В прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle B = \angle B_1$. Найдите: а) A_1B_1, если $BC = 2$ см, $AB = 3$ см, $B_1C_1 = 6$ см; б) CB, если $B_1C_1 = 6$ см, $A_1B_1 = 10$ см, $AB = 5$ см.
2. В прямоугольном треугольнике катет равен 12, а косинус прилежащего угла равен 0,3. Чему равна гипотенуза?
3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 16, а косинус одного из острых углов равен 0,4. Чему равен катет, прилежащий к данному острому углу?

К пункту 15. «Теорема Пифагора и теорема, обратная ей»

З а д а ч а. Дан треугольник ABC, в котором $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. Найти AB, если его медианы AM и BN перпендикулярны.

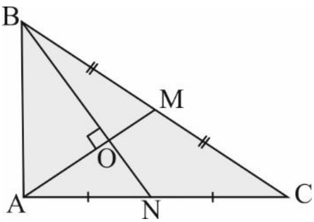


Рисунок 28

Дано: ΔABC, $AC = 9$ см, $BC = 12$ см,
AM и BN – медианы,
$AM \perp BN$,
$AM \cap BN = O$ (рисунок 28).

Найти: AB.

Р е ш е н и е. Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, то обозначим: $ON = x$, $BO = 2x$, $OM = y$, $AO = 2y$. Тогда из прямоугольных треугольников AON и BOM по теореме Пифагора имеем: $x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$ и $y^2 +$

$+ (2x)^2 = 6^2$. Из второго равенства: $y^2 = 36 - 4x^2$. Подставив в первое равенство вместо y^2 выражение $36 - 4x^2$, получим:
$x^2 + 4(36 - 4x^2) = \frac{81}{4}$, $x^2 + 144 - 16x^2 = \frac{81}{4}$, $576 - 60x^2 = 81$, $495 = 60x^2$, $x^2 = \frac{33}{4}$.

Отсюда $x = \frac{\sqrt{33}}{2}$; тогда $y^2 = 36 - 33 = 3$, $y = \sqrt{3}$; $BO = \sqrt{33}$ см, $AO = 2\sqrt{3}$ см.

Так как AB – гипотенуза прямоугольного треугольника AOB, то

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{12+33} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,(\text{см})$$

Ответ: $3\sqrt{5}$ см.

К пункту 16. «Тригонометрические функции острого угла»

З а д а ч а **№ 164**. б) Докажите, что для любого острого угла α выполняется неравенство $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

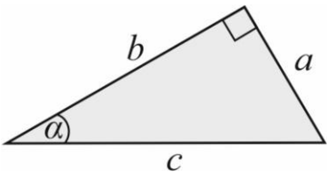


Рисунок 29

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α – острый угол прямоугольного треугольника с катетами, равными a, b, и гипотенузой c (рисунок 29). Тогда $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} > 1$ (так как $a + b > c$).

Проверочная работа по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

Вариант 1

1. В равнобедренном ΔABC основание $AC = 24$ см, биссектриса $BD = 5$ см. Найдите: а) боковые стороны; б) синус угла при основании; в) высоту, проведенную к боковой стороне треугольника.

[а) 13 см; б) $\frac{5}{13}$; в) $9\frac{3}{13}$ см]

2. Постройте острый угол A, если $\cos A = \frac{3}{4}$.

Вариант 2

1. В равнобедренном ΔABC боковая сторона равна AB = = 17 см, медиана BD = 15 см. Найдите: а) основание AC; б) синус угла при основании; в) высоту, проведенную к боковой стороне треугольника.

[а) 16 см; б) $\frac{15}{17}$; в) $14\frac{2}{17}$ см]

2. Постройте острый угол B, если $\sin B = \frac{3}{4}$.

К пункту 18. «Тригонометрические тождества»

З а д а ч а **№ 189**. Найдите произведение длин катетов прямоугольного треугольника, если даны его гипотенуза c и сумма d синусов острых углов.

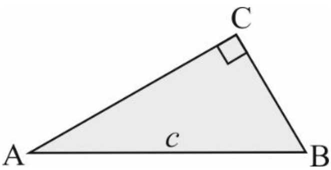


Рисунок 30

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $AB = c$, $\sin A + \sin B = d$ (рисунок 30).

Найти: $AC \cdot BC$.

Р е ш е н и е. $AC = c \cdot \sin B$, $BC = c \cdot \sin A$.

$$AC \cdot BC = c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B.$$

Для нахождения произведения синусов возведем в квадрат данное равенство: $d^2 = \sin^2 A + 2\sin A \cdot \sin B + \sin^2 B$.

Так как $\sin B = \frac{AC}{c} = \cos A$ и $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, то $\sin A \cdot \sin B =$ $= 0{,}5(d^2 - 1)$. Следовательно, $AC \cdot BC = 0{,}5\, c^2(d^2 - 1)$.

Ответ: $0{,}5\, c^2(d^2 - 1)$.

К пункту 19. «Решение прямоугольных треугольников»

1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 5 см, а синус одного из острых углов равен 0,6. Найдите катеты треугольника.
2. В прямоугольном треугольнике катет равен 6 см, а тангенс противолежащего ему угла равен 0,75. Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 26 см, а косинус одного из острых углов равен $\frac{5}{13}$. Найдите катеты треугольника.
4. В прямоугольном треугольнике катет равен 16 см, а тангенс прилежащего угла равен 0,8. Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.

Проверочная работа по теме «Решение прямоугольных треугольников»

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:
   а) $2\sin 30° + \sqrt{2}\cos 45°$;
   б) $4\cos 60° \quad \sin 30° + \operatorname{ctg} 30° \cdot \operatorname{tg} 30°$.
2. Железнодорожная насыпь (формы равнобедренной трапеции в поперечном разрезе) имеет основания 6 м и 24 м. Найдите с точностью до 0,1 м высоту насыпи, если ее боковые стороны наклонены к горизонту под углом 35°.

[≈ 6,3 м]

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:
   а) $4\cos 60° + \sqrt{2}\sin 45° + \operatorname{tg} 45°$;
   б) $8\sin 30° + \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{ctg} 60°$.
2. Железнодорожная насыпь (формы равнобедренной трапеции в поперечном разрезе) высотой 12 м имеет основания 36 м и 6 м. Найдите с точностью до 1° угол наклона насыпи к горизонту.

[≈ 39°]

К пункту 20. «Задачи по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

Отметим, что в этом пункте дана с решением задача о свойстве биссектрисы треугольника:

«Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника».

Это свойство следует запомнить учащимся, оно часто используется при решении геометрических задач. Например, при доказательстве интересного факта, который учащиеся могли заметить, выполняя построения:

в разностороннем треугольнике биссектриса проходит между медианой и высотой, проведенными из одной и той же вершины.

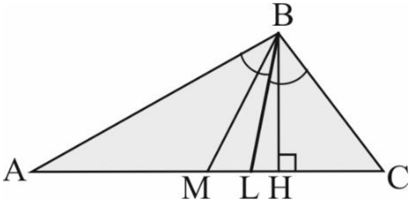


Рисунок 31

Дано: ΔABC, $AB \neq AC \neq BC$, BH – высота, BM – медиана, BL – биссектриса (рисунок 31).

Доказать: L лежит между H и M.

Доказательство. 1) Пусть $AB > BC$, тогда $\angle C > \angle A$, так как против большей стороны лежит больший угол.

2) Из прямоугольных треугольников CBH и ABH найдем:

$\angle ABH = 90° - \angle A$, $\angle CBH = 90° - \angle C$. Так как $\angle C > \angle A$, то $\angle ABH > \angle CBH$, откуда следует, что $\angle ABH > \frac{1}{2} \angle B = \angle ABL$. Значит, биссектриса BL проходит между сторонами угла ABH, поэтому точка L лежит между точками A и H.

3) По свойству биссектрисы угла $\frac{AL}{AB} = \frac{LC}{BC}$. Эту пропорцию можно записать так: $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$. Так как $AB > BC$, то $\frac{AL}{LC} > 1$, значит, $AL > LC$. Следовательно, $AL > \frac{1}{2}AC = AM$. Откуда следует, что точка M лежит между точками A и L.

4) Таким образом, точка L лежит между точками M и H.

Задачу **№ 211**, 5С) «В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC =$ $= 12$ см. Найдите высоту CH ΔABC.» учащиеся могут решать разными способами, но более простой – это:

1) найти сторону AC по теореме Пифагора ($AC = 5$);
2) выразить $\sin B$ из ΔABC и из ΔBCH ($\sin B = \frac{5}{13}$, $\sin B = \frac{h}{12}$, где $h = CH$);
3) из пропорции $\frac{5}{13} = \frac{h}{12}$ найти h.

Площади фигур (22 ч)

Понятие площади. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Площадь прямоугольника (8.1.3.9, 8.1.3.10) – **3** ч.

Площади параллелограмма и треугольника (8.1.3.11, 8.1.3.12) – **3** ч.

Решение задач по теме «Площади параллелограмма и треугольника» (8.1.3.11, 8.1.3.12) – **1** ч.

Проверочная работа по теме «Площади параллелограмма и треугольника» – **1** ч.

Площадь выпуклого четырехугольника (8.1.3.11 – 8.1.3.13) – **3** ч.

Площадь трапеции (8.1.3.13) – **3** ч.

Решение задач по теме «Площади фигур», проверочная работа (8.1.3.9 – 8.1.3.13) – **2** ч.

СОР «*Площади фигур*» – **1** ч.

Итоговый урок – **1** ч.

Резерв времени – **4** ч.

Основные цели: введение понятия площади фигуры; систематизация знаний учащихся о площадях различных видов многоугольников.

Методические рекомендации

Обобщаются знания учащихся о понятии площади фигуры и площадях многоугольников. Выводятся формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции. Показывается применение метода площадей при доказательстве теорем и решении задач. В этом разделе завершается введение новых аксиом курса школьной планиметрии. Это основные свойства площади.

Понятие равносоставленных фигур не является новым для учащихся (новое только его название). Использование равносоставленных фигур целесообразно при решении задач практического характера, кроме того, оно занимательно для учащихся. В то же время теория равносоставленных фигур не излагается подробно.

При изучении этого раздела получает развитие еще один из эффективных методов решения геометрических задач – метод площадей. Суть этого метода в том, что, выражая площади одной и той же фигуры или равновеликих фигур двумя способами (через известные и неизвестные величины), легко получить алгебраические соотношения, из которых находят неизвестные величины. Примеры применения этого метода даны в учебнике. Приведем еще два.

З а д а ч а 1. Высота равнобедренного треугольника, проведенная из вершины его угла при основании, равна 10 см. Найти сумму расстояний от любой точки основания этого треугольника до прямых, содержащих его боковые стороны.

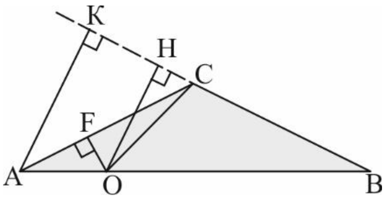


Рисунок 32

Дано: ΔABC, $AC = BC$, $AK \perp BC$, $O \in AB$, $OF \perp AC$, $OH \perp BC$ (рисунок 32).

Найти: $OF + OH$.

Р е ш е н и е. Проведем отрезок CO. Тогда площадь треугольника ABC, с одной стороны, равна $S_{\Delta ABC} = 0{,}5AC \cdot AK$, с другой – $S_{\Delta ABC} = 0{,}5AC \cdot OF + 0{,}5BC \cdot OH = 0{,}5AC \cdot (OF + OH)$, так как $AC = BC$. Следовательно, $OF + OH = AK$.

Ответ: 10 см.

Решая такие задачи, не надо забывать и об общем методе полной индукции. Приведенное решение распространяется и на случаи прямоугольного и остроугольного треугольников. Данный чертеж предложен специально, чтобы учащиеся, решая задачи на равнобедренный треугольник, не представляли его только как остроугольный. Заметим, что если бы для решения этой задачи использовался метод равных треугольников, то необходимо было бы рассматривать все возможные виды равнобедренного треугольника.

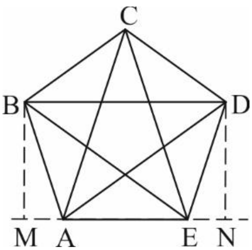


Рисунок 33

Дано: пятиугольник *ABCDE*,
AB || *EC*, *BC* || *AD*, *CD* || *BE*,
DE || *AC* (рисунок 33).

Доказать: *AE* || *BD*.

З а д а ч а 2. В пятиугольнике *ABCDE* отрезки *AB* и *EC*, *BC* и *AD*, *CD* и *BE*, *DE* и *AC* параллельны. Доказать, что *AE* и *BD* параллельны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпишем пары равновеликих треугольников: *ABE* и *ABC*, *ABC* и *BCD*, *BCD* и *CDE*, *CDE* и *ADE*. Они равновелики, так как в каждой паре этих треугольников одно и то же основание и одинаковые высоты, проведенные к этим основаниям. Следовательно, равновелики треугольники *ABE* и *ADE*. Тогда из равенства площадей этих треугольников с одним и тем же основанием *AE* следует, что их высоты *BM* и *DN* равны и параллельны. Следовательно, четырехугольник *MBDN* – прямоугольник, значит, отрезок *BD* параллелен отрезку *AE*.

Полезно также использовать модели призм и пирамид, на которых вычислять площади их граней, применяя изученные формулы. Это будет способствовать закреплению теоретических знаний по теме, формированию пространственных представлений учащихся, расширению содержания учебных заданий и их практической направленности.

Рекомендации по использованию ЭП

№	Название файла	Краткое содержание	Применение
1.	Площади фигур	Задания по теме «Площади фигур». Раздаточный материал.	п. 21
2.	Площадь параллелограмма. Часть 1	Задания по теме «Площадь параллелограмма». Раздаточный материал.	п. 22
3.	Площадь параллелограмма. Часть 2	Задания по теме «Площадь параллелограмма». Раздаточный материал.	п. 22

4.	Площадь треугольника	Доказательство теоремы о площади треугольника на цветных динамических рисунках и ее применение при решении задач.	п. 22
5.	Площадь треугольника. Часть 1	Задания по теме «Площадь треугольника». Раздаточный материал.	п. 22
6.	Площадь треугольника. Часть 2	Задания по теме «Площадь треугольника». Раздаточный материал.	п. 22
7.	Площадь четырехугольника	Повторение свойств площадей фигур и вывода формул площади прямоугольника и трапеции с использованием динамических цветных рисунков и предупреждением возможных ошибок.	п. 24
8.	Площадь трапеции. Часть 1	Задания по теме «Площадь трапеции». Раздаточный материал.	п. 24
9.	Площадь трапеции. Часть 2	Задания по теме «Площадь трапеции». Раздаточный материал.	п. 24
10.	Площади параллелограмма, треугольника и трапеции. Часть1	Видеофайл с выводом формул площади параллелограмма, треугольника и трапеции.	п. 22, 24
11.	Площади параллелограмма, треугольника и трапеции. Часть 2	Видеофайл с объяснением решений задач на комплексное использование формул площади параллелограмма, треугольника и трапеции.	п. 25
12.	Это интересно	Тематический ребус с отложенным ответом.	п. 25
13.	Тестовые задания по разделу «Площади фигур»	Задания трех видов: 1) *выберите верный ответ*; 2) *выберите верные утверждения;* 3) *заполните пропуски.*	п. 25

Указания к решению задач и дополнительные задания

К пункту 21. «Понятие площади. Площадь прямоугольника»

1. Сторона прямоугольника равна 7 см, а его площадь 56 см^2. Чему равна вторая сторона прямоугольника?
2. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна 81 см^2; 0,36 см^2; 8 см^2; b см^2.
3. Стороны прямоугольника относятся как 2 : 3, а его площадь 54 см^2. Найдите стороны этого прямоугольника.
4. Диагональ прямоугольника равна 5 дм, а одна из его сторон 3 дм. Найдите площадь прямоугольника.
5. Вершины прямоугольника принадлежат окружности радиусом R. Найдите его площадь, если известно, что радиусы, проведенные к концам одной стороны прямоугольника, образуют угол 60°.
6. Дан квадрат площадью 4 см^2. На его диагонали постройте второй квадрат и найдите его площадь.
7. Дан прямоугольник со сторонами 1 см и 2 см. Постройте на его диагонали квадрат и найдите его площадь.
8. Постройте квадрат, площадь которого равна 10 см^2.
9. Найдите площадь квадрата, все вершины которого лежат на окружности радиусом 5 см.

К пункту 22. «Площади параллелограмма и треугольника»

При решении задачи **№ 233** «а) В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, $BC = 6$ см, найдите стороны AB и AC треугольника и его площадь» нужно порекомендовать учащимся провести высоту BH и найти неизвестные стороны в треугольниках ABH и CBH.

Решая задачу **№ 235** «а) Найдите большую высоту треугольника, если его стороны 9 см, 10 см, 17 см», учащиеся часто допускают ошибку, построив большую высоту к меньшей стороне, как показано на рисунке 34, *а*. Обозначив отрезок AD через x, а DB через $9 - x$, составляют уравнение: $17^2 - x^2 = 10^2 - (9 - x)^2$. Решая его, получают $x = 15$ и не понимают, как такое может получиться.

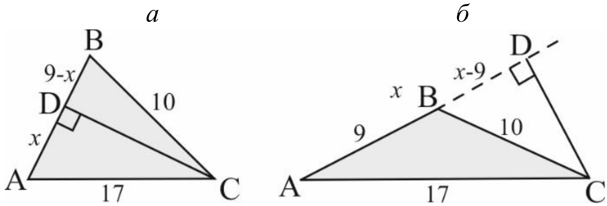


Рисунок 34

Дано: ΔABC,
$AB = 9$ см,
$BC = 10$ см,
$AC = 17$ см.

Найти: большую высоту.

Нужно объяснить им, что $(9 - x)^2 = (x - 9)^2$, а точка D расположена на продолжении стороны AB (рисунок 34, *б*), так как данный в задаче треугольник тупоугольный. Чтобы избежать такой ошибки, можно учащимся дать признак тупоугольного треугольника ($17^2 > 9^2 + 10^2$) без его доказательства или предложить решать задачу методом площадей: найдя меньшую высоту, площадь треугольника и затем большую высоту.

Задача **№ 236**. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно 12 см, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

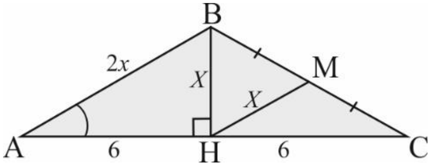


Рисунок 35

Дано: ΔABC, $AB = BC$, $AC =$ $= 12$ см,
BH – высота, $BH = HM$,
M – середина стороны BC (рисунок 35).

Найти: $S_{\Delta ABC}$.

При решении этой задачи нужно установить, что угол A равен 30° и найти высоту BH, используя тангенс 30°.

Задача **№ 237**. Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен P, а точка пересечения диагоналей находится на расстоянии d от каждой его стороны.

Необходимо доказать, что данный параллелограмм является ромбом.

К пункту 23. «Площадь выпуклого четырехугольника»

З а д а ч а **№ 247**. Найдите наибольшее значение площади прямоугольника, диагональ которого равна: а) 11 см; б) 3 дм.

Так как площадь прямоугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, где d – это длина диагонали, а φ – величина угла между диагоналями, то площадь будет наибольшей при наибольшем значении синуса, то есть при $\varphi = 90°$.

На втором уроке по этой теме можно провести самостоятельную работу.

Вариант 1

1. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, в котором $AB = 7\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$.
2. Периметр ромба 68 см, а одна из его диагоналей равна 30 см. Найдите площадь ромба.

Вариант 2

1. Найдите площадь параллелограмма $MNPK$, в котором $MN = 5\sqrt{3}$ см, $\angle M = 60°$.
2. Сторона ромба 20 см, а одна из его диагоналей равна 24 см. Найдите площадь ромба.

К пункту 24. «Площадь трапеции»

1. В прямоугольной трапеции основания равны 5 см и 17 см, а большая боковая сторона – 13 см. Найдите площадь трапеции.
2. В равнобедренной трапеции основания равны 51 см и 69 см, а боковая сторона – 41 см. Найдите площадь трапеции.
3. Длины оснований трапеции относятся как 3 : 1, а ее высота равна 3 см. Найдите основания трапеции, если ее площадь равна 24 $см^2$.
4. Длины оснований трапеции равны 5 см и 7 см, а высота – 3 см. Найдите сторону квадрата, площадь которого в три раза больше площади трапеции.

5. В прямоугольной трапеции один из углов 135°, средняя линия равна 18 см, а основания относятся как $\frac{1}{6}:\frac{4}{3}$. Найдите площадь трапеции.
6. Трапеция $ABCD$ отрезком CE ($E \in AD$) разделена на параллелограмм и треугольник, площади которых равны. Чему равно большее основание трапеции, если меньшее основание равно 5 см?
7. Основания трапеции равны 10 см и 20 см. Диагональ трапеции отсекает от нее прямоугольный равнобедренный треугольник, гипотенузой которого является меньшее основание трапеции. Найдите площадь этой трапеции.
8. Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), если $BC = 12$, $AC = 26$, $CD = 10$, $AD = 24$.

К пункту 25. «Задачи по теме «Площади фигур»»

З а д а ч а **№ 269** а). Докажите, что если провести три медианы треугольника, то они разделят его на 6 равновеликих треугольников.

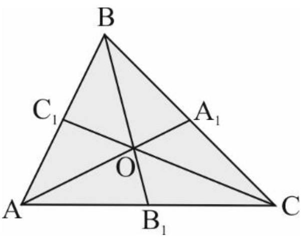


Рисунок 36

Дано: ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1 – медианы,
O – точка пересечения медиан (рисунок 36).

Доказать: треугольники AOB_1, AOC_1, BOC_1, BOA_1, COA_1, COB_1 равновелики.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $S_{\Delta ABC} = Q$. Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{\Delta ABB_1} = S_{\Delta CBB_1} = \frac{1}{2}Q$.

2) Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, то $S_{\Delta AOB_1} = S_{\Delta COB_1} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABB_1} = \frac{1}{6}Q$.

3) Медиана OC_1 делит ΔAOB на два равновеликих треугольника. Так как $S_{\Delta AOB} = \frac{2}{3} S_{\Delta ABB_1} = \frac{1}{3} Q$, то $S_{\Delta AOC_1} = S_{\Delta BOC_1} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABO} = \frac{1}{6} Q$.

4) Аналогично: $S_{\Delta COA_1} = S_{\Delta BOA_1} = \frac{1}{2} S_{\Delta BOC} = \frac{1}{6} Q$.

5) Таким образом, доказано, что треугольники AOB_1, AOC_1, BOC_1, BOA_1, COA_1, COB_1 равновелики.

Дополнительные задания

1. В ΔABC $\angle B = 90°$, $AB = BC$, $AC = 8$ см. Найдите $S_{\Delta ABC}$.
2. Найдите площадь прямоугольного равнобедренного треугольника, периметр которого равен 24 см.
   [$144(3 - 2\sqrt{2})$ см^2.]
3. В параллелограмме $ABCD$ $AB = BD$, $AD = 12$ см, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Найдите площадь параллелограмма.
4. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB. Чему равна S_{ABCD}, если $AD = a$ см, $BD = b$ см?
5. Найдите площадь ромба, меньшая диагональ которого равна 13 см, а высота – 12 см.
   [$\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5} = \frac{d \cdot 2}{2 \cdot 13}$, $d = 31{,}2$ см. $S = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 31{,}2 = 202{,}8$ (см^2).]
6. В прямоугольном ΔABC проведена высота CD, гипотенуза $AB = 9$ см, катет $AC = 6$ см. Найдите CD и $S_{\Delta ABC}$.
   [$\cos A = \frac{6}{9} = \frac{AD}{6}$, $AD = 4$ см. $CD = 2\sqrt{5}$ см. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{5}$ см^2.]
7. Постройте три квадрата так, чтобы вершинами второго были середины сторон первого, а вершинами третьего – середины сторон второго квадрата. Найдите площади первого и третьего квадратов, если площадь второго квадрата равна S.
8. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны 6 м и 8 м, а одна из диагоналей равна 10 м. Найдите площадь четырехугольника.
   [Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон данного выпуклого четырехугольника, является параллелограммом. Сторона и половины диагоналей

параллелограмма образуют прямоугольный треугольник. Следовательно, параллелограмм является ромбом, а диагонали данного выпуклого четырехугольника равны. Угол φ между диагоналями равен острому углу ромба. Из прямоугольного треугольника $\cos\frac{\varphi}{2} = 0{,}8$, значит $\frac{\varphi}{2} \approx 37°$, $\varphi \approx 74°$. Тогда площадь выпуклого четырехугольника равна: $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot \sin 74° \approx 50\cdot 0{,}96 \approx 48$ (м^2).]

9. Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают диагональ DB соответственно в точках E и F. Площадь параллелограмма равна Q. Найдите площадь невыпуклого пятиугольника $AEFCD$.

[$S_{AEFCD} = S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}Q$.]

Проверочная работа по теме «Площади фигур»

Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle C = 60°$, $CB = 4$ см, $CA = 6$ см. Найдите биссектрису CD этого треугольника.

[$2{,}4\sqrt{3}$ см]

2. В прямоугольной трапеции острый угол при основании 30°, сумма оснований равна $18\sqrt{3}$ см, а сумма боковых сторон – 18 см. Найдите площадь трапеции.

[$54\sqrt{3}$ см^2]

Вариант 2

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 6 см. Найдите биссектрису этого треугольника, проведенную из вершины прямого угла.

[$2\sqrt{2}$ см]

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 4$ см и $AD = 10$ см диагональ AC перпендикулярна стороне CD и образует со стороной CB угол 45°. Найдите площадь трапеции.

[35 см^2]

Прямоугольная система координат на плоскости (10 ч)

Координаты: точки на плоскости; середины отрезка. Расстояние между двумя точками (8.1.3.14, 8.1.3.15, 8.1.3.16) – **2** ч.

Уравнения линий на плоскости. Уравнения прямых (8.1.3.19) – **1** ч.

Уравнение окружности. Взаимное расположение прямой и окружности (8.1.3.17, 8.1.3.18) – **1** ч.

Применение координат к определению тригонометрических функций углов от 0° до 180° (8.1.3.20, 8.1.3.22 – 8.1.3.24) – **2** ч.

Решение задач по теме «Прямоугольная система координат на плоскости» (8.1.3.20) – **2** ч.

СОР «Прямоугольная система координат на плоскости» – **1** ч.

Итоговый урок – **1** ч.

Основные цели: систематизация знаний учащихся о прямоугольной системе координат, изучение с ее использованием свойств фигур; ознакомление с методом координат решения геометрических задач.

Методические рекомендации

Использование прямоугольной системы координат позволяет исследовать свойства фигур и задавать их соответствующими уравнениями. Таким образом многие геометрические задачи формулируются на языке алгебры. Их решения становятся алгоритмическими, а свойства фигур не только доказываются, но и выражаются алгебраическими соотношениями (тождествами, уравнениями, неравенствами и их системами). При использовании прямоугольной системы координат постоянно осуществляются связи геометрии с алгеброй. Например, широко используются квадратные корни, квадратные уравнения, свойства действительных чисел и действий над ними. Этому хорошо способствует учебная программа по предмету «Алгебра», которой предусмотрено опережающее или параллельное изучение вопросов, необходимых для изложения геометрических тем.

Однако при изучении этого раздела не надо видеть в нем геометрию лишь в приложениях алгебры. Раздел играет важную роль. Во-первых, в идейном обновлении курса школьной геометрии введением в него начал аналитической геометрии. Во-вторых, в логическом плане содержание этого раздела связано с предыдущим материалом, в частности, используется для расширения элементов тригонометрии. В-третьих, в нем формируется метод координат – один из наиболее общих методов решения геометрических задач, к тому же важных в практическом аспекте. Типичные примеры решения задач этим методом приведены в учебнике. Приведем еще один.

З а д а ч а. Дана окружность с центром в точке O, диаметр которой равен 8. Отмечена середина M радиуса OD и проведена параллельная ему хорда AB. Найти сумму $MA^2 + MB^2$.

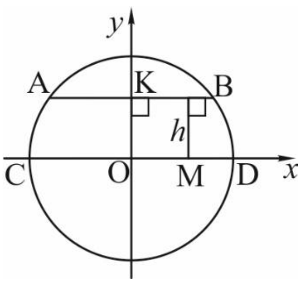


Рисунок 37

Дано: окружность, O – центр окружности,
$CD = 8$ – диаметр окружности,
$M \in OD$, $OM = MD$, AB – хорда,
$AB \parallel CD$ (рисунок 37).

Найти: $MA^2 + MB^2$.

Р е ш е н и е. Построим систему координат так, как показано на рисунке 37. Тогда имеем: $M(2; 0)$, середина отрезка AB – точка $K(0; h)$. По свойству хорды, перпендикулярной диаметру, и теореме Пифагора: $A(-\sqrt{16-h^2};\ h)$, $B(\sqrt{16-h^2};\ h)$. Находим сумму:

$$MA^2 + MB^2 = \left(2+\sqrt{16-h^2}\right)^2 + h^2 + \left(2-\sqrt{16-h^2}\right)^2 + h^2 = 40$$

Ответ: 40.

Решение задачи при любом ином расположении хорды AB такое же, а указанная сумма постоянна и равна 40.

Отметим, что задачи, предложенные в этом и других разделах, ориентированы преимущественно на непосредственное применение теории, изученной в них. Таким образом хорошо закрепляется новый теоретический материал. Однако это не означает, что учащиеся не могут решать некоторые задачи и другими, известными им методами. Например, последнюю задачу можно решить, используя теорему Пифагора, без применения системы координат. Надо иметь в виду, что решение задач различными способами при изучении текущего материала отнимает значительное время, поэтому в большей мере это предлагается при повторении разделов и подготовке учащихся к контрольной работе.

Рекомендации по использованию ЭП

№	Название файла	Краткое содержание	Применение
1.	Прямоугольная система координат на плоскости. Часть 1	Задания по теме «Прямоугольная система координат на плоскости». Раздаточный материал.	п. 26
2.	Прямоугольная система координат на плоскости. Часть 1	Задания по теме «Прямоугольная система координат на плоскости». Раздаточный материал.	п. 26
3.	Уравнение линии на плоскости	Вывод уравнений окружности и прямой с использованием цветных динамических рисунков и их применение при решении задач.	п. 27–28
4.	Уравнение прямой	Видеофайл с объяснением решений задач на применение уравнения прямой.	п. 27, 30
5.	Уравнение прямой. Часть 1	Задания по теме «Уравнение прямой». Раздаточный материал.	п. 27
6.	Уравнение прямой. Часть 2	Задания по теме «Уравнение прямой». Раздаточный материал.	п. 27
7.	Уравнение окружности	Задания по теме «Уравнение окружности». Раздаточный материал.	п. 28

8.	Тестовые задания по разделу «Прямоугольная система координат на плоскости»	Задания трех видов: 1) *выберите верный ответ*; 2) *выберите верные утверждения;* 3) *заполните пропуски.*	п. 30

Указания к решению задач и дополнительные задания

К пункту 26. «Координаты: точки на плоскости; середины отрезка. Расстояние между двумя точками»

Задачи этого раздела решаются при помощи формул или путем составления уравнения, однако выполнение чертежа по условию задачи во многом облегчает ее решение. Покажем один из вариантов оформления решения таких задач.

З а д а ч а **№ 282, б)**. Докажите, что: точки $A(4;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$, $O(0;\ 0)$ являются вершинами квадрата.

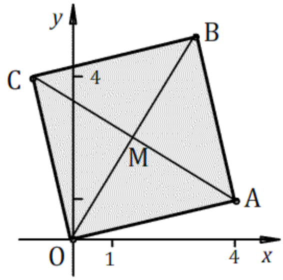


Рисунок 38

Дано: $A(4;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(-1;\ 4)$, $O(0;\ 0)$ (рисунок 38).

Доказать: $ABCO$ – квадрат.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Середина отрезка AC точка $M\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$, середина отрезка BO точка $M_1\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$. Так как точки M и M_1 совпадают, то $ABCO$ – параллелограмм.

2) $AC=\sqrt{(4+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$,

$BO=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$; так как $AC = BO$, то $ABCO$ – прямоугольник.

3) $OC=\sqrt{17}$, $OA=\sqrt{17}$; так как $OC = OA$, то $ABCO$ – квадрат.

З а д а ч а **№ 283**. Найдите: а) на оси Ox точку, равноудаленную от точек $A(3;\ 7)$ и $B(-5;\ 9)$; б) координаты точки, равноудаленной от осей координат и находящейся от точки (10; 0) на расстоянии, равном $5\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е. а) Пусть искомая точка M. Так как она лежит на оси Ox, то $M(x; 0)$. По условию $MA = MB$, следовательно, $AM^2 = BM^2$. Решим уравнение:

$$(x-3)^2 + 49 = (x+5)^2 + 81,\ x^2 - 6x + 9 - x^2 - 10x - 25 = 32,$$
$$-16x = 48,\ x = -3,\ M(-3; 0).$$

Выполнив чертеж, можно убедиться, что эта точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB;

б) Так как искомая точка M равноудалена от осей координат, то она лежит на прямой $y = x$ или $y = -x$ (рисунок 39). Пусть $M(a; a)$, $A(10; 0)$. По условию $MA = 5\sqrt{2}$, следовательно, $MA^2 = 50$. Решим уравнение: $(10 - a)^2 + a^2 = 50$,

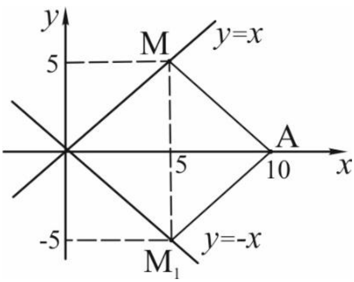


Рисунок 39

$100 - 20a + 2a^2 - 50 = 0$,
$2a^2 - 20a + 50 = 0$,
$a^2 - 10a + 25 = 0$,
$(a - 5)^2 = 0$, $a = 5$.
$M(5; 5)$ или $M(5; -5)$.

Ответ: а) (–3; 0); б) (5; 5) или (5; –5).

З а д а ч а **№ 285**. Квадрат $ABCD$ лежит в I координатной четверти и имеет координаты вершин $A(1; 1)$, $B(1; 5)$, $D(5; 1)$. Точка M – середина стороны CD, N лежит на AC и $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$. Найдите координаты точек M и N и докажите, что треугольник DMN равнобедренный.

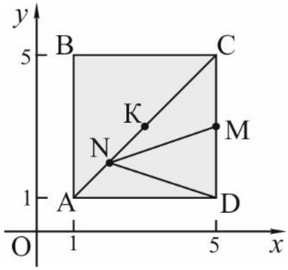


Рисунок 40

Дано: $ABCD$ – квадрат, $A(1;\ 1)$, $B(1;\ 5)$, $D(5;\ 1)$, M – середина стороны CD, $N \in AC$, $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$ (рисунок 40).

Найти: координаты точек M и N.

Доказать: ΔDMN – равнобедренный.

Р е ш е н и е. 1) Так как $AB \parallel Oy$, $AD \parallel Ox$, $AB = AD = 4$, то $C(5;\ 5)$.

2) Середина CD точка $M(5;\ 3)$.

3) Так как $AN = \frac{1}{4}AC$, то N – середина AK, где K – середина AC. Следовательно, $K(3;\ 3)$, $N(2;\ 2)$.

4) $ND = \sqrt{(5-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$,

$NM = \sqrt{(5-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Так как $ND = NM$, то ΔDMN – равнобедренный.

Ответ: $M(5;\ 3)$, $N(2;\ 2)$.

К пункту 27. «Уравнения линий на плоскости. Уравнения прямых»

З а д а ч а **№ 295**. Запишите уравнение линии, все точки которой равноудалены от точек: а) $A(1;\ 1)$ и $B(3;\ 3)$; б) $M(0;\ 2)$ и $N(4;\ -2)$.

Р е ш е н и е. а) Все точки, равноудаленные от двух данных точек, лежат на серединном перпендикуляре к данному отрезку. Поэтому уравнение искомой линии – это уравнение прямой, перпендикулярной данному отрезку и проходящей через его середину.

1) Уравнение прямой AB: $y = x$.

2) Середина отрезка AB, точка $C(2;\ 2)$.

3) Уравнение прямой, перпендикулярной AB и проходящей через точку C: $y = kx + b$. Так как произведение угловых коэф-

фициентов перпендикулярных прямых равно – 1, то $k \cdot 1 = -1$, $k = -1$. Найдем b: $2 = -2 + b$, $b = 4$. Тогда получим уравнение $y = -x + 4$.

б) Решение аналогично решению задачи а).

1) Уравнение прямой MN: $y = k_1 \cdot x + b_1$. Подставляя координаты точек M и N, получим: $b_1 = 2$; $4 = -2k_1 + 2$, $k_1 = -1$. Прямая MN: $y = -x + 2$.

2) Середина отрезка MN, точка $K(2; 0)$.

3) Уравнение прямой, перпендикулярной MN и проходящей через точку K: $y = k_2 \cdot x + b_2$. Так как $k_1 \cdot k_2 = -1$, то $k_2 = 1$. Найдем b: $0 = 2 + b$, $b = -2$. Искомое уравнение $y = x - 2$.

Ответ: а) $y = -x + 4$; б) $y = x - 2$.

З а д а ч а **№ 296**. Составьте уравнение линии, которой принадлежат все точки, такие, что разность квадратов расстояний от них до точек $A(1; 0)$ и $B(-1; 2)$ равна 1.

Р е ш е н и е. Пусть искомой линии принадлежит точка $M(x; y)$. Так как по условию $MA^2 - MB^2 = 1$ или $MB^2 - MA^2 = 1$, то получим:

$$(x-1)^2 + y^2 - (x+1)^2 - (y-2)^2 = 1 \text{ или}$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 - (x-1)^2 - y^2 = 1.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим уравнения прямых:

$$-4x + 4y - 5 = 0 \text{ или } 4x - 4y + 3 = 0.$$

Ответ: $-4x + 4y - 5 = 0$ или $4x - 4y + 3 = 0$.

К пункту 28. «Уравнение окружности»

З а д а ч а **№ 305**. Составьте уравнение окружности, описанной около: а) прямоугольного ΔABC с вершинами в точках $A(0; 16)$, $B(12; 0)$, $C(0; 0)$; б) равностороннего ΔNMK, координаты вершин которого равны $N(-3\sqrt{3}; 0)$, $M(0; 9)$, $K(3\sqrt{3}; 0)$.

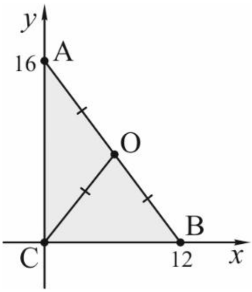


Рисунок 41

а) Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$ (рисунок 41), $A(0;\ 16)$, $B(12;\ 0)$, $C(0;\ 0)$.

Составить: уравнение окружности, описанной около ΔABC.

Р е ш е н и е. а) Центр O окружности, описанной около прямоугольного треугольника, – это середина гипотенузы AB, $O(6;\ 8)$. Радиус R такой окружности равен OC, $R^2 = OC^2 = 36 + 64 = 100$. Уравнение искомой окружности: $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$.

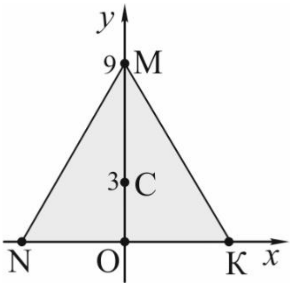


Рисунок 42

б) Дано: ΔNMK, $NM = MK = NK$ (рисунок 42), $N(-3\sqrt{3};\ 0)$, $M(0;\ 9)$, $K(3\sqrt{3};\ 0)$.

Составить: уравнение окружности, описанной около ΔNMK.

Р е ш е н и е. б) Центр C окружности, описанной около равностороннего треугольника, – это точка пересечения его медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины. Радиус этой окружности R равен $\frac{2}{3}$ длины медианы. В данной задаче медиана $MO = 9$, $R = MC = 6$, $C(0;\ 3)$. Уравнение искомой окружности: $x^2 + (y - 3)^2 = 36$.

Ответ: а) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$; б) $x^2 + (y - 3)^2 = 36$.

К пункту 29. «Применение координат к определению тригонометрических функций углов от 0° до 180°»

Дополнительные задания

1. Упростите выражения: а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha$; в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; г) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$; д) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
2. Найдите значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{9}{40}$, $0° < \alpha < 180°$.
3. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 4 см. Найдите его сторону.
4. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 1 см. Найдите сторону треугольника.
5. Сторона ромба равна b, а один из его углов равен 120°. Найдите диагонали ромба.

К пункту 30. «Задачи по теме «Прямоугольная система координат на плоскости»»

В этом пункте дано как следствие при решении задачи о свойстве сторон и диагоналей трапеции важное соотношение между диагоналями и сторонами параллелограмма. Можно предложить учащимся доказать это свойство и рекомендовать его для запоминания, так как оно находит широкое применение в решении задач.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

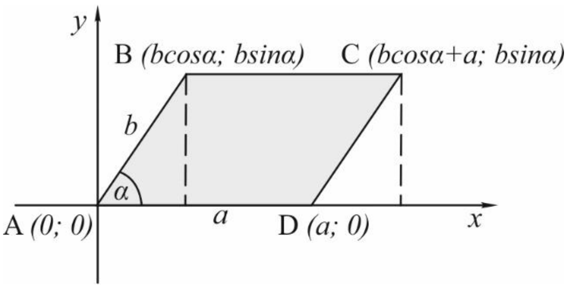


Рисунок 43

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AB = b$, $AD = a$, $\angle A = \alpha$ (рисунок 43).

Доказать: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем систему координат, как показано на рисунке 43, тогда вершины параллелограмма: $A(0; 0)$, $B(b\cos\alpha; b\sin\alpha)$, $C(b\cos\alpha + a; b\sin\alpha)$, $D(a; 0)$.

$AC^2 = (b\cos\alpha + a)^2 + (b\sin\alpha)^2 = b^2\cos^2\alpha + 2ab\cos\alpha + a^2 + b^2\sin^2\alpha = b^2 + 2ab\cos\alpha + a^2$. Так как $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

$BD^2 = (a - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 = a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2$.

$AC^2 + BD^2 = 2b^2 + 2a^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, что и требовалось доказать.

Можно показать учащимся, как использовать это свойство для нахождения медиан треугольника, зная его стороны.

З а д а ч а. В ΔABC известны стороны $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Найти его медиану CO.

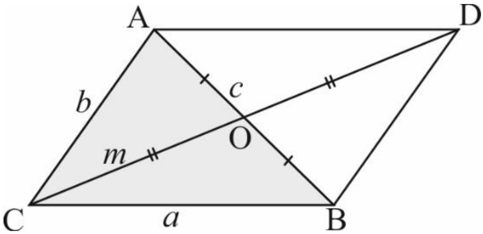


Рисунок 44

Дано: ΔABC,
$AB = c$, $AC = b$, $BC = a$,
CO – медиана (рисунок 44).
Найти: CO.

Р е ш е н и е. Пусть $CO = m$. Продлим медиану CO и отложим отрезок $OD = CO$, тогда четырехугольник $ADBC$ – параллелограмм. По свойству диагоналей и сторон параллелограмма $AB^2 + CD^2 = 2a^2 + 2b^2$.

$c^2 + (2m)^2 = 2a^2 + 2b^2$, $4m^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$,

$m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Ответ: $0{,}5\cdot\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

В упражнении **№ 325** нужно рекомендовать учащимся выполнить чертеж и определить вид треугольника.

Повторение курса геометрии 8 класса (6 ч)

Решение задач на повторение курса геометрии 8 класса – **4** ч.

СОЧ «Прямоугольная система координат. Итоговое повторение» – **1** ч.

Итоговый урок – **1** ч.

Основные цели: систематизация знаний учащихся по курсам геометрии 7–8 классов; повторение известных методов решения геометрических задач.

Методические рекомендации

Учитывая, что содержание курса геометрии 8 класса весьма разнообразно в теоретическом плане, повторение целесообразно в большей мере провести путем решения задач, в том числе различными способами. К этому времени учащимся известны следующие методы решения задач: метод равных треугольников, доказательство от противного, алгебраический метод, тригонометрический метод, метод координат и метод площадей. Приведем примеры на применение этих методов при решении одной задачи разными методами и их комплексном использовании.

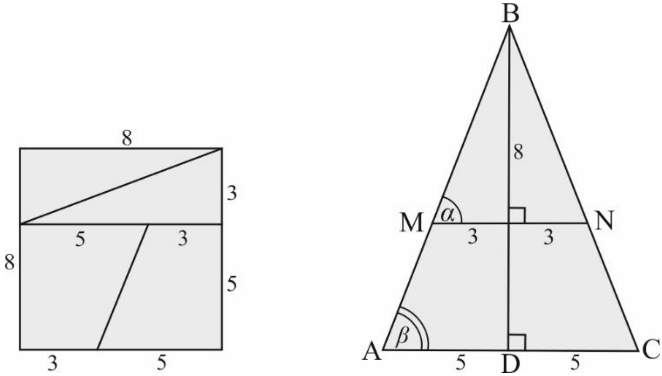
Полезными при повторении будут и упражнения на обнаружение ошибок в рассуждениях, решениях задач. Приведем примеры с о ф и з м о в:

1. «Доказать, что косинус любого угла больше нуля».

«Д о к а з а т е л ь с т в о». Пусть дан угол α. Тогда два косинуса этого угла больше одного его косинуса, то есть $2\cos\alpha >$ $> \cos\alpha$. Возведя обе части неравенства в квадрат, получим: $4\cos^2\alpha > \cos^2\alpha$. Тогда $4\cos^2\alpha - \cos^2\alpha > 0$, $\cos^2\alpha(4-1) > 0$, $\cos^2\alpha >$ > 0. Разделив обе части неравенства на $\cos\alpha$, получим $\cos\alpha > 0$. Утверждение «доказано».

2. «Доказать, что $8\cdot 8 = 65$».

«Д о к а з а т е л ь с т в о». Рассмотрим квадрат со стороной, равной 8. Разделим его на два прямоугольных треугольника и две прямоугольные трапеции, как показано на рисунке 45, *а*. Затем из этих фигур составим треугольник, как показано на рисунке 45, *б*. Площадь этого треугольника равна: 0,5·10·13 = 65. Таким образом, 8·8 = 65. Утверждение «доказано».



а *б*

Рисунок 45

Ошибка состоит в том, что из указанных фигур нельзя построить треугольник. Фигура на рисунке 45, *б* – пятиугольник. Это следует из того, что угол *BAC* не равен углу *BMN*, так как tg *BAC* = 2,5, а tg *BMN* = $\frac{8}{3}$, $2{,}5 \neq \frac{8}{3}$.

Аналогичные примеры учащиеся могут составлять друг другу для последующей взаимопроверки и обнаружения ошибок.

Следует отметить, что при изучении геометрии в 8 классе возрастает количество алгебраических ошибок, особенно связанных со свойствами неравенств.

Приведем примеры решения задач различными способами.

З а д а ч а 1. Сравнить сумму длин катетов прямоугольного треугольника с суммой длин его гипотенузы и высоты, проведенной к ней.

Р е ш е н и е. *I способ*. Обозначим a, b, c, h длины катетов, гипотенузы и высоты соответственно. Тогда из формул площади прямоугольного треугольника следует, что $ab = ch$, откуда $h = \frac{ab}{c}$. Оценим разность:

$$(a+b)-\left(c+\frac{ab}{c}\right)=\frac{ac+bc-c^2-ab}{c}=\frac{ac-c^2+bc-ab}{c}=$$
$$=\frac{c(a-c)-b(a-c)}{c}=\frac{(a-c)(c-b)}{c}.$$

Последняя дробь отрицательна, так как $c > a$, $a - c < 0$, $c - b > 0$. Следовательно, $a + b < c + h$.

II способ. Используем те же обозначения и сравним квадраты сумм $a + b$ и $c + h$: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(c + h)^2 = c^2 + 2ch + h^2$. Так как $2ab = 2ch$ и по теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, то $(a + b)^2 < (c + h)^2$. Следовательно, $a + b < c + h$.

III способ. Обозначим один катет a, а прилежащий к нему угол β. Тогда второй катет равен $a\cdot\mathrm{tg}\beta$, гипотенуза $\frac{a}{cos\beta}$, высота, проведенная к ней, $a\cdot\sin\beta$. Определим знак разности:

$$(a + a\cdot\mathrm{tg}\beta) - (\frac{a}{\cos\beta} + a\cdot\sin\beta) = a + a\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{a}{\cos\beta} - a\cdot\sin\beta =$$

$$= a(1 - \sin\beta) - \frac{a}{\cos\beta}(1 - \sin\beta) = a(1 - \sin\beta)(1 - \frac{1}{\cos\beta}).$$

Так как синус и косинус острого угла меньше 1, то последнее выражение отрицательно. Следовательно,

$$(a + a\cdot\mathrm{tg}\beta) < (\frac{a}{\cos\beta} + a\cdot\sin\beta).$$

Ответ: Меньше сумма длин катетов.

Полезно также при повторении разными способами решать задачи, обобщая некоторые упражнения, предложенные в учебнике. Например, задачу **№ 238** «Существуют ли два треугольника таких, что длина каждой стороны первого треугольника меньше 1 см, а длина каждой стороны второго треугольника больше 1 м, но площадь первого больше площади второго треугольника? Если существуют, то приведите пример».

Можно обобщить и решить различными способами.

З а д а ч а 2. Известно, что каждая сторона первого треугольника больше любой стороны второго треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

Р е ш е н и е. *I способ*. Нет, не следует.

Например, площадь равностороннего треугольника со стороной 50 равна:

$$\frac{2500\sqrt{3}}{4} = 625\sqrt{3}.$$

Площадь равнобедренного треугольника со сторонами 100, 51, 51 равна:

$$0,5 \cdot 100 \cdot \sqrt{51^2 - 50^2} = 50\sqrt{101}.$$

$50\sqrt{101} < 625\sqrt{3}$, так как квадрат выражения, стоящего в левой части неравенства, меньше квадрата выражения, записанного в правой его части.

Можно было бы взять и другие данные, например, равносторонний треугольник со стороной 12 и равнобедренный со сторонами 13, 13, 24.

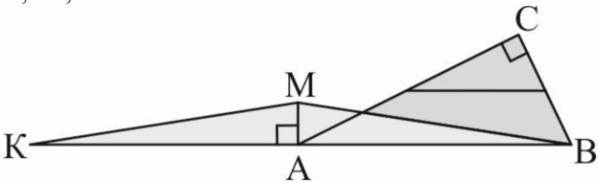


Рисунок 46

II способ. Построим прямоугольный ΔABC с катетами AC, BC и гипотенузой AB. Проведем его большую среднюю линию. Продлим гипотенузу на отрезок $AK = AB$ и проведем серединный перпендикуляр к отрезку BK (рисунок 46). Отметим на этом перпендикуляре точку M так, что AM меньше расстояния между построенной средней линией и гипотенузой. Тогда $BK > AB$, $KM > AC$, $BM > BC$, так как $BM > AB$, $AB > AC$, $AB > BC$. Но площадь ΔBKM меньше площади ΔABC, так как высота ΔABC больше высоты ΔBMK более, чем в 2 раза, а основание AB меньше основания BK ровно в 2 раза.

Ответ: Не следует.

При решении таких задач комплексно повторяются и используются знания по геометрии и алгебре.

Завершают итоговое повторение контрольная работа, ее анализ и краткий обзор изученного материала.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СУММАТИВНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

СОР *«Многоугольники. Исследование четырехугольников»*

Тема

Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, их свойства и признаки. Теорема Фалеса. Пропорциональные отрезки. Трапеция, виды и свойства. Средние линии треугольника.

Цели обучения

8.1.1.3–6 – знать определения параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата и применять их свойства и признаки;

8.1.1.7 – знать и применять теорему Фалеса;

8.1.1.9 – делить отрезок на *n* равных частей с помощью циркуля и линейки;

8.1.1.10 – строить пропорциональные отрезки;

8.1.1.11 – знать определение, виды и свойства трапеции;

8.1.1.12 – применять свойство средней линии треугольника.

Критерий оценивания

Учащийся

- Выполняет построение параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата и указывает свойство диагоналей построенного четырехугольника.
- Применяет свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата при решении задач.
- Использует теорему Фалеса для деления отрезка в заданном отношении.
- Применяет свойство средней линии треугольника.

Уровень мыслительных навыков

Применение, навыки высокого порядка

Время выполнения 32 минуты.

Задания

Вариант 1

1. Постройте квадрат и проведите его диагонали. Обозначьте на рисунке свойства диагоналей квадрата.

2. В ромбе *ABCD O* – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Угол *BAD* равен 70°. Найдите углы треугольника *COD*.
3. Дан отрезок *AB*. С помощью чертежных инструментов постройте точку *C* так, чтобы *AC* : *CB* = 1 : 2.
4. В равнобедренной трапеции *ABCD* точки *M*, *N*, *P*, *K* – середины сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD* и *AD*. Определите вид четырехугольника *MNPK* и найдите его периметр, если *AC* = 10 см.

Вариант 2

1. Постройте параллелограмм и проведите его диагонали. Обозначьте на рисунке свойства диагоналей параллелограмма.
2. В ромбе *ABCD O* – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Угол *ABC* равен 100°. Найдите углы треугольника *COD*.
3. Дан отрезок *CD*. С помощью чертежных инструментов постройте точку *M* так, чтобы *CM* : *MD* = 3 : 1.
4. В прямоугольнике *ABCD* точки *M*, *N*, *P*, *K* – середины сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD* и *AD*. Определите вид четырехугольника *MNPK* и найдите его периметр, если *AC* = 8 см.

Вариант 3

1. Постройте ромб и проведите его диагонали. Обозначьте на рисунке свойства диагоналей ромба.
2. В ромбе *ABCD* угол *CAD* равен 40°. Найдите углы ромба.
3. Дан отрезок *KL*. С помощью чертежных инструментов постройте точку *P* так, чтобы *KP* : *PL* = 2 : 1.
4. В ромбе *ABCD* точки *M*, *N*, *P*, *K* – середины сторон соответственно *AB*, *BC*, *CD* и *AD*. Определите вид четырехугольника *MNPK* и найдите его периметр, если *AC* = 10 см, *BD* = 8 см.

Вариант 4

1. Постройте прямоугольник и проведите его диагонали. Обозначьте на рисунке свойства диагоналей прямоугольника.
2. В ромбе $ABCD$ угол BDA равен 50°. Найдите углы ромба.
3. Дан отрезок MN. С помощью чертежных инструментов постройте точку X так, чтобы $MX : XN = 1 : 3$.
4. В трапеции $ABCD$ точки M, N, P, K – середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD. Определите вид четырехугольника $MNPK$ и найдите его периметр, если $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.

Критерий оценивания	**№ зад.**	**Дескриптор**	**Балл**
		Учащийся	
Выполняет построение параллелограмма одного из видов и указывает свойства его диагоналей	**1**	Строит указанный четырехугольник	1
		Отмечает свойство диагоналей построенного четырехугольника	2
Применяет свойства ромба при решении задач.	**2**	Выполняет чертеж по условию задачи	1
		Применяет свойство углов ромба	1
		Применяет свойство диагоналей ромба	2
Использует теорему Фалеса для деления отрезка в заданном отношении.	**3**	Делит данный отрезок на n равных частей с помощью циркуля и линейки	2
		Находит на отрезке точку, делящую его в заданном отношении	1
Применяет: свойство средней линии треугольника; признаки параллелограмма; определения видов параллелограмма при решении задач	**4**	Выполняет чертеж по условию задачи	1
		Использует свойства средней линии треугольника	2
		Применяет признак параллелограмма	1
		Применяет определения видов параллелограмма	1

			Всего баллов	**15**
Количество баллов	6–10	11–13	14–15	
Отметка	3	4	5	

СОР *«Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»*

Тема

Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора. Основные тригонометрические тождества. Решение прямоугольных треугольников.

Цели обучения

8.1.3.2 – знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов через отношения сторон в прямоугольном треугольнике;
8.1.3.3 – применять теорему Пифагора и теорему, обратную ей;
8.1.3.7 – применять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60° для нахождения элементов прямоугольного треугольника;
8.1.3.8 – находить стороны и углы прямоугольного треугольника по двум заданным элементам;
8.1.3.22 – применять основные тригонометрические тождества;
8.1.3.24 – находить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ по данному значению одного из них.

Критерий оценивания

Учащийся

- Определяет синус, косинус острого угла прямоугольного треугольника по данным на чертеже.
- Применяет теорему Пифагора и теорему, обратную ей при решении задач.
- Применяет тригонометрические функции углов 30°, 45°, 60° для нахождения элементов прямоугольного треугольника.
- Применяет основные тригонометрические тождества.
- Находит значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ по данному значению одного из них.

Уровень мыслительных навыков
Применение, навыки высокого порядка.

Время выполнения 35 минут.

Задания

Вариант 1

1. Какие из предложенных равенств верны для данного треугольника (рисунок 47)?

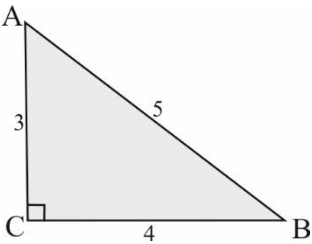


Рисунок 47

а) $\sin A = \frac{4}{5}$; в) $\sin A = \frac{4}{3}$;

б) $\sin A = \frac{3}{5}$; г) $\sin A = \frac{3}{4}$.

2. Существует ли прямоугольный треугольник со сторонами, равными 5 см, 4 см, 7 см? Ответ объясните.
3. Укажите верные равенства:

   а) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, б) $\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, в) $\text{tg}\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, г) $\text{ctg}\, 45° = 1$.
4. В ΔABC $\angle A = 60°$, высота $BD = 3$ см делит сторону AC на отрезки AD и DC, причем $DC = 4$ см. Найдите стороны AB и BC.
5. Найдите $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ и $\text{ctg}\, \alpha$, если $\text{tg}\, \alpha = \frac{3}{5}$, где α – острый угол.

Вариант 2

1. Какие из предложенных равенств верны для данного треугольника (рисунок 48)?

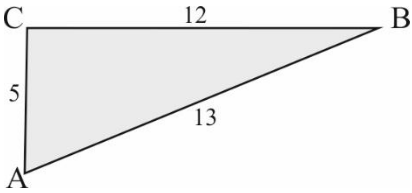


Рисунок 48

а) $\cos B = \frac{5}{13}$; в) $\cos B = \frac{5}{12}$;

б) $\cos B = \frac{12}{13}$; г) $\cos B = \frac{12}{5}$.

2. Существует ли прямоугольный треугольник со сторонами, равными 6 см, 8 см, 10 см? Ответ объясните.
3. Укажите верные равенства:

   а) $\sin 60° = \frac{1}{2}$, б) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, в) $\text{ctg}\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, г) $\text{tg}\, 45° = 1$.
4. В ΔABC $\angle C = 30°$, высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 6$ см и $DC = 8\sqrt{3}$ см. Найдите стороны AB и BC.
5. Найдите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\text{ctg}\, \alpha$, если $\text{tg}\, \alpha = \frac{4}{7}$, где α – острый угол.

Вариант 3

1. Какие из предложенных равенств верны для данного треугольника (рисунок 49)?

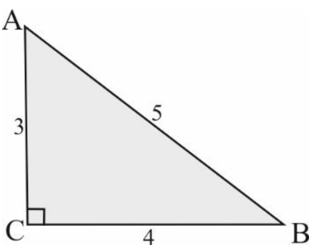


Рисунок 49

а) $\cos A = \frac{4}{5}$; в) $\cos A = \frac{4}{3}$;

б) $\cos A = \frac{3}{5}$; г) $\cos A = \frac{3}{4}$.

2. Существует ли прямоугольный треугольник со сторонами, равными 9 см, 12 см, 15 см? Ответ объясните.
3. Укажите верные равенства:

   а) $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, б) $\cos 30° = \frac{1}{2}$, в) $\text{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, г) $\text{ctg}\, 60° = \sqrt{3}$.
4. В ΔABC $\angle A = 60°$, высота BD образует со стороной BC угол 60° и делит сторону AC на отрезки $AD = 3\sqrt{3}$ см и $DC = 12$ см. Найдите стороны AB и BC.

5. Найдите cos α, tg α и ctg α, если sin α = 0,4, где α – острый угол.

Вариант 4

1. Какие из предложенных равенств верны для данного треугольника (рисунок 50)?

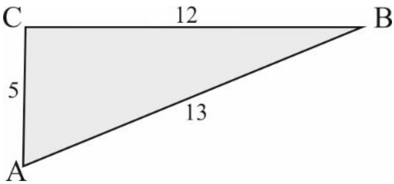


Рисунок 50

а) $\sin B = \frac{5}{13}$; в) $\sin B = \frac{5}{12}$;

б) $\sin B = \frac{12}{13}$ г) $\sin B = \frac{12}{5}$.

2. Существует ли прямоугольный треугольник со сторонами, равными 6 см, 4 см, 3 см? Ответ объясните.
3. Укажите верные равенства:

   а) $\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, б) $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, в) $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$, г) $\text{ctg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. В ΔABC высота $BD = 6\sqrt{3}$ см образует со стороной AB угол 30° и делит сторону AC на отрезки AD и DC, причем $DC = 8\sqrt{3}$ см. Найдите стороны AB и BC.
5. Найдите sin α, cos α и ctg α, если $\text{tg } \alpha = \frac{9}{40}$, где α – острый угол.

Критерий оценивания	**№ зад.**	**Дескриптор**	**Балл**
		Учащийся	
Определяет синус, косинус острого угла прямоугольного треугольника по данным на чертеже	**1**	Указывает верное значение синуса, косинуса острого угла прямоугольного треугольника по данным на чертеже	1
Применяет теорему, обратную теореме Пифагора	**2**	По данным значениям сторон треугольника определяет прямоугольный ли он	1
Знает значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60°	**3**	Указывает верные значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°	4

<table>
<tr><td rowspan="4">Применяет теорему Пифагора и тригонометрические функции углов 30°, 60° для нахождения сторон прямоугольного треугольника</td><td rowspan="4">4</td><td>Выполняет чертеж по условию задачи</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Применяет теорему Пифагора</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Применяет тригонометрические функции углов 30°, 60° для нахождения стороны прямоугольного треугольника</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Или применяет свойство прямоугольного треугольника с углом 30° и теорему Пифагора</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Находит значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ по данному значению одного из них.</td><td rowspan="2">5</td><td>По данному значению одной из тригонометрических функций, и используя теорему Пифагора, находит стороны прямоугольного треугольника и значения остальных тригонометрических функций</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Или применяет основные тригонометрические тождества для нахождения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ по данному значению одного из них.</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="right">Всего баллов</td><td>11</td></tr>
</table>

Количество баллов	5–7	8–9	10–11
Отметка	3	4	5

СОР *«Площади»*

Тема

Понятие площади. Равновеликость и равносоставленность фигур. Площади квадрата, прямоугольника, параллелограмма, ромба, треугольника, трапеции.

Цели обучения

8.1.3.9 – знать определение площади многоугольника и ее свойства;

8.1.3.10 – знать определения равновеликих и равносоставленных фигур;

8.1.3.11–13 – применять формулы площади параллелограмма, ромба; треугольника; трапеции.

Критерий оценивания

Учащийся

- Устанавливает соответствие между формулой и фигурой, площадь которой можно найти по указанной формуле.
- Находит сторону квадрата равновеликого данному прямоугольнику.
- Находит площадь параллелограмма или треугольника по двум сторонам и углу между ними.
- Применяет формулу площади трапеции при решении задач.

Уровень мыслительных навыков

Применение, навыки высокого порядка.

Время выполнения 35 минут.

Задания

Вариант 1

1. Нарисуйте фигуру, площадь которой можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}ab$. Обозначьте на чертеже отрезки, указанные в формуле.
2. Найдите сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 8 см и 9 см.
3. Найдите площадь параллелограмма, две стороны которого равны 4 см и $2\sqrt{2}$ см, а угол между ними 45°.
4. Средняя линия равнобедренной трапеции делится диагональю на отрезки 2 см и 5 см. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 6 см.

Вариант 2

1. Нарисуйте фигуру, площадь которой можно найти по формуле $S = ah$. Обозначьте на чертеже отрезки, указанные в формуле.
2. Найдите сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 5 см и 15 см.

3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 см и $2\sqrt{3}$ см, а угол между ними 60°.
4. Средняя линия равнобедренной трапеции делится диагональю на отрезки 6 см и 3 см. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 5 см.

Вариант 3

1. Нарисуйте фигуру, площадь которой можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}ah$. Обозначьте на чертеже отрезки, указанные в формуле.
2. Найдите сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 6 см и 12 см.
3. Найдите площадь ромба со стороной 8 см и углом 60°.
4. Средняя линия равнобедренной трапеции делится диагональю на отрезки 3 см и 7 см. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 8 см.

Вариант 4

1. Нарисуйте фигуру, площадь которой можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}a^2$. Обозначьте на чертеже отрезки, указанные в формуле.
2. Найдите сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 8 см и 16 см.
3. Найдите площадь треугольника со сторонами 5 см, $4\sqrt{2}$ см и углом 45° между ними.
4. Средняя линия равнобедренной трапеции делится диагональю на отрезки 4 см и 8 см. Найдите площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 5 см.

<table>
<tr><th rowspan="2">Критерий оценивания</th><th rowspan="2">№ зад.</th><th>Дескриптор</th><th rowspan="2">Балл</th></tr>
<tr><th>Учащийся</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Устанавливает соответствие между формулой $S = \frac{1}{2}ab$ ($S = \frac{1}{2}a^2$) и фигурой, площадь которой можно найти по этой формуле.</td><td rowspan="2">1</td><td>Строит многоугольник, площадь которого можно найти по данной формуле</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Обозначает на чертеже отрезки, указанные в формуле.</td><td>1</td></tr>
</table>

Находит сторону квадрата равновеликого данному прямоугольнику.	**2**	Вычисляет площадь данного прямоугольника	1
		Составляет уравнение, используя определение равновеликих фигур и формулу площади квадрата	2
		Находит сторону квадрата	1
Находит площадь параллелограмма или треугольника по двум сторонам и углу между ними.	**3**	Находит площадь параллелограмма (треугольника), используя формулу $S = ab\sin\alpha$ ($S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$).	3
		Или находит высоту параллелограмма (треугольника), используя $\sin\alpha$, и вычисляет искомую площадь.	
Применяет формулу площади трапеции при решении задач.	**4**	Выполняет чертеж по условию задачи	1
		Находит основания трапеции, применяя свойство средней линии треугольника	1
		Находит высоту трапеции, используя свойство равнобедренной трапеции и теорему Пифагора	1
		Вычисляет площадь трапеции	1
		Всего баллов	**13**

Количество баллов	5–8	9–11	12–13
Отметка	3	4	5

СОР *«Прямоугольная система координат на плоскости»*

Тема

Координаты точки на плоскости. Координаты середины отрезка. Расстояние между двумя точками. Уравнение окружности. Уравнение прямой. Взаимное расположение прямых и окружностей, заданных уравнениями. Применение координат к решению задач.

Цели обучения

8.1.3.14 – вычислять расстояние между двумя точками на плоскости по их координатам;

8.1.3.15 – находить координаты середины отрезка;

8.1.3.17 – знать уравнение окружности с центром в точке (a, b) и радиусом r: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;

8.1.3.18 – строить окружность по заданному уравнению;

8.1.3.19 – записывать общее уравнение прямой и уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$ax + by + c = 0$, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

8.1.3.20 – решение простейших задач в координатах.

Критерий оценивания

Учащийся

- Знает, какая линия задается уравнением $ax = 0$ или $by = 0$. Строит эту линию.
- Записывает уравнение окружности с центром в заданной точке и с данным радиусом.
- Находит точки пересечения окружности, заданной уравнением, с осями координат.
- Записывает уравнение прямой, проходящей через две точки.
- Записывает уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельной прямой, заданной уравнением.
- Решает простейшие задачи в координатах.

Уровень мыслительных навыков

Применение, навыки высокого порядка.

Время выполнения 35 минут.

Задания

Вариант 1

1. Уравнением какой фигуры является уравнение $x = 3$? Сделайте чертеж.
2. Напишите уравнение окружности с центром в точке (–1; 3) и радиусом, равным 5. Найдите точки пересечения этой окружности с осью Ox.

3. Составьте уравнение прямой AB, если $A(0; 1)$, $B(1; 4)$ и уравнение прямой, параллельной AB и проходящей через точку $C(5; 2)$.
4. Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(0; –1)$, $B(2; 2)$, $C(4; –1)$, $D(2; –4)$ является ромбом.

Вариант 2

1. Уравнением какой фигуры является уравнение $y = –5$? Сделайте чертеж.
2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(2; –4)$ и радиусом, равным $\sqrt{13}$. Найдите точки пересечения этой окружности с осью Oy.
3. Составьте уравнение прямой MN, если $M(–5; –4)$, $N(–1; –1)$ и уравнение прямой, параллельной MN и проходящей через точку $K(–4; 3)$.
4. Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(–5; –4)$, $B(–4; 3)$, $C(1; –2)$, $D(0; –9)$ является ромбом.

Вариант 3

1. Уравнением какой фигуры является уравнение $y = x$? Сделайте чертеж.
2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(–4; 3)$ и радиусом, равным 5. Найдите точки пересечения этой окружности с осью Ox.
3. Составьте уравнение прямой CD, если $C(2; 4)$, $D(–1; 5)$ и уравнение прямой, параллельной CD и проходящей через точку $E(1; –2)$.
4. Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(–5; –3)$, $B(–3; 6)$, $C(6; 8)$, $D(4; –1)$ является ромбом.

Вариант 4

1. Уравнением какой фигуры является уравнение $y = –x$? Сделайте чертеж.
2. Напишите уравнение окружности с центром в точке $(3; –2)$ и радиусом, равным $3\sqrt{2}$. Найдите точки пересечения этой окружности с осью Oy.

3. Составьте уравнение прямой KL, если $K(4; –1)$, $L(2; –4)$ и уравнение прямой, параллельной KL и проходящей через точку $M(2; 6)$.
4. Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(–2; –1)$, $B(–1; 5)$, $C(5; 4)$, $D(4; –2)$ является ромбом.

Критерий оценивания	**№ зад.**	**Дескриптор**	**Балл**
		Учащийся	
Знает, какая линия задается уравнением $ax = 0$ или $by = 0$. Строит эту линию.	**1**	Знает, уравнением какой фигуры является уравнение $ax = 0$ или $by = 0$	1
		Строит указанную прямую	1
Знает уравнение окружности с центром в точке (a, b) и радиусом r : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	**2**	Записывает уравнение окружности с центром в заданной точке и с данным радиусом.	2
		Находит точки пересечения окружности, заданной уравнением с осями координат	1
Записывает уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	**3**	Записывает уравнение прямой, проходящей через две точки	1
		Записывает уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельной прямой, заданной уравнением	2
Решает простейшие задачи в координатах	**4**	Находит координаты середин отрезков AC и BD и доказывает, что четырехугольник $ACBD$ – параллелограмм, так как совпадают середины его диагоналей	3
		Или находит длины всех сторон четырехугольника и доказывает, что он является параллелограммом, так как его противоположные стороны равны	
		Доказывает, что параллелограмм является ромбом, сравнивая длины его соседних сторон	1

			Всего баллов	**12**
Количество баллов	5–7	8–10	11–12	
Отметка	3	4	5	

СОЧ *«Прямоугольная система координат на плоскости. Итоговое повторение»*

Тема

Площади квадрата, прямоугольника, параллелограмма, ромба, треугольника, трапеции. Решение прямоугольных треугольников. Параллелограмм, его свойства и признаки. Свойство медиан треугольника. Координаты середины отрезка. Расстояние между двумя точками.

Цели обучения

8.1.3.11–13 – знать и применять формулы площади параллелограмма, ромба, треугольника, трапеции;

8.1.3.7 – применять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60° для нахождения элементов прямоугольного треугольника;

8.1.3.8 – находить стороны и углы прямоугольного треугольника по двум заданным элементам;

8.1.1.4 – знать и применять свойства параллелограмма;

8.1.1.5 – знать и применять признаки параллелограмма;

8.1.3.1 – знать и применять свойства медиан треугольника;

8.1.3.14 – вычислять расстояние между двумя точками на плоскости по их координатам;

8.1.3.15 – находить координаты середины отрезка.

Критерий оценивания

Учащийся

- Знает различные формулы для вычисления площадей параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.
- Находит стороны и углы прямоугольного треугольника по двум заданным элементам.
- Применяет тригонометрические функции угла 30° для нахождения сторон прямоугольного треугольника.

- Применяет свойства и признаки параллелограмма при решении задач.
- Применяет свойство медиан треугольника.
- Находит координаты середины отрезка и его длину.

Уровень мыслительных навыков
Применение, навыки высокого порядка.

Время выполнения 35 минут.

Задания

Вариант 1

1. Запишите две формулы площади трапеции: а) с основаниями a, b, высотой h; б) с диагоналями d_1, d_2 и углом α между ними.
2. В прямоугольном ΔABC гипотенуза $AB = 10$ см, $\angle B = 30°$. Найдите катет BC.
3. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A проведены высоты AK и CF. Докажите, что четырехугольник $KBFD$ – параллелограмм.
4. Равносторонний треугольник задан координатами вершин $A(-\sqrt{3}; -1)$, $B(0; 2)$, $C(\sqrt{3}; -1)$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Вариант 2

1. Запишите две формулы площади ромба: а) со стороной a, углом α; б) с диагоналями d_1, d_2.
2. В прямоугольном ΔKNM гипотенуза $KM = 16$ см, $\angle M = 30°$. Найдите катет MN.
3. В параллелограмме $KMNP$ на диагонали MP отмечены точки C и E так, что $\angle MNC = \angle PKE$, точка C лежит между M и E. Докажите, что четырехугольник $KCNE$ – параллелограмм.
4. Известны координаты вершин равностороннего треугольника: $A(-6; 0)$, $B(6; 4\sqrt{3})$, $C(6; -4\sqrt{3})$. Найдите радиус окружности, описанной около него.

Вариант 3

1. Запишите две формулы площади параллелограмма: а) со сторонами a, b, углом α; б) с диагоналями d_1, d_2 и углом φ между ними.
2. В прямоугольном ΔEDF катет $DE = 10\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$. Найдите гипотенузу DF.
3. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На лучах OB и OD отмечены соответственно точки M и N так, что $\angle BAM = \angle DCN$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ – параллелограмм.
4. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник с вершинами $A(0; –2)$, $B(–2\sqrt{2}; 4)$, $C(2\sqrt{3}; 4)$.

Вариант 4

1. Запишите две формулы площади квадрата: а) со стороной a; б) с диагональю d.
2. В прямоугольном ΔKTM катет $KT = 16\sqrt{3}$ см, $\angle K = 30°$. Найдите гипотенузу KM.
3. Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры BM и DN на диагональ AC. Докажите, что четырехугольник $BNDM$ – параллелограмм.
4. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника с вершинами $A(–4; –3\sqrt{3})$, $B(–4; 3\sqrt{3})$, $C(5; 0)$.

Критерий оценивания	**№ зад.**	**Дескриптор**	**Балл**
		Учащийся	
Знает различные формулы для вычисления площадей параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции	**1**	Записывает одну формулу площади указанной фигуры	1
		Записывает вторую формулу площади указанной фигуры	1
Применяет тригонометрические функции угла 30° для нахождения сторон прямо-	**2**	Находит неизвестную сторону прямоугольного треугольника, применяя $\sin 30°$ или $\cos 30°$	2

угольного треугольника		**Или** находит неизвестную сторону, применяя свойство прямоугольного треугольника с углом 30° и теорему Пифагора.	
Применяет свойства и признаки параллелограмма при решении задач	**3**	Выполняет чертеж по условию задачи	1
		Применяя свойства параллелограмма и признаки равенства треугольников, доказывает равенство необходимых по условию задачи отрезков	2
		Применяя один из признаков параллелограмма, доказывает, что указанный четырехугольник – параллелограмм	1
Применяет свойство медиан треугольника, находит координаты середины отрезка и его длину	**4**	Выполняет чертеж по условию задачи	1
		Знает свойства равностороннего треугольника и расположение центра окружности вписанной в него (описанной около него)	1
		Находит координаты середины стороны треугольника	1
		Находит длину медианы, зная координаты ее концов	1
		Применяет свойство медиан треугольника и находит искомый радиус	1
		Всего баллов	**13**

Количество баллов	5–8	9–11	12–13
Отметка	3	4	5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Образовательные, развивающие и воспитательные задачи обучения школьников геометрии в 8 классе решаются, исходя из специфики его содержания, определенного учебной программой. Формирование системы знаний учащихся (их полноты и глубины, системности, оперативности и гибкости, осознанности и прочности, свернутости и развернутости, конкретности и обобщенности) так же важно, как и последовательное, полноценное изучение всех программных вопросов.

С введением в курс геометрии 8 класса элементов тригонометрии и аналитической геометрии возникает вопрос об их роли и значении в целом в содержании школьной планиметрии. Дело в том, что одни теоремы просто доказываются традиционным методом, пришедшим из глубины веков со времен Евклида, другие – методом геометрических преобразований, третьи – координатным методом. Однако эта простота часто относительна, так как рационализация фрагментов теории в тех или иных разделах конкретным методом требует его углубленного понимания и нередко расширения понятийного аппарата, связанного с ним. А это влечет за собой увеличение объема нового теоретического материала и перегрузки учащихся. Кроме того, школьникам доступнее тот метод, который используется постоянно. Таким является традиционный метод, основанный в курсе геометрии 7 класса на небольшом количестве понятий, признаках равенства и свойствах треугольников, признаках и свойствах параллельных прямых. Этот метод продолжен в курсе геометрии 8 класса при изучении четырехугольников, в частности, включением в него теоремы Фалеса. Далее традиционный метод найдет широкое применение при изучении подобных треугольников, свойств окружности и начал стереометрии в 9 классе. Поэтому он сохранен и применяется на протяжении всего курса планиметрии как доминирующий. В изложении теории другие методы используются в меньшей мере, их развитие осуществляется преимущественно при решении задач.

Для укрепления межпредметных связей, особенно с алгеброй, усиливается роль аналитических методов. Например, арифметических и алгебраических. Это важно как для укрепления единства школьной математики, так и для неформального изучения алгебры, учитывая ее насыщенность.

В этом плане исключительную роль играет обучение решению геометрических задач. При этом учитываются возможности решения: одной и той же задачи различными способами; одной задачи различными способами, имеющими общие этапы решения; задач с похожими условиями разными способами; задач, составленных под конкретный метод; комплексных задач, охватывающих учебный материал из разных разделов алгебры и геометрии; обобщенных задач.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СРЕДНЕСРОЧНЫЙ ПЛАН
по реализации Типовой учебной программы
по учебному предмету «Геометрия» для 8 класса[3]

Содержание учебного материала / число уроков /
– планируемые учебные достижения учащихся.

1-я ЧЕТВЕРТЬ

Повторение курса геометрии 7 класса / 2 /
– знать и уметь применять геометрические понятия и их свойства, изученные в 7 классе.

I. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

п. 1. Многоугольник. Сумма углов многоугольника / 1 /
– знать определения многоугольника, выпуклого многоугольника, элементов многоугольника (8.1.1.1)[4];
– выводить формулы суммы внутренних углов и суммы внешних углов многоугольника (8.1.1.2);
– уметь решать задачи на нахождение суммы углов многоугольника и числа его сторон (8.1.1.1, 8.1.1.2).

п. 2. Виды четырехугольников. Параллелограмм и его свойства / 1 /
– знать определения параллелограмма и его видов (8.1.1.3, 8.1.1.6);
– доказывать и применять свойства параллелограмма (8.1.1.4).

п. 3, 8. Признаки параллелограмма / 1 /
– доказывать и применять признаки параллелограмма при решении задач на вычисление, а также задач на доказательство и построение (8.1.1.5).

---

[3] **Примечание**. Корректировка плана проводится учителем в соответствии с пунктом 13 главы 3 Типовой учебной программы по геометрии для 7–9 классов, в котором указано, что «распределение часов в четверти по разделам и внутри разделов варьируется по усмотрению учителя».

[4] В скобках указаны коды целей учебной программы.

п. 4. Свойства и признаки прямоугольника / 1 /
- знать определение прямоугольника (8.1.1.6);
- доказывать и применять свойства и признаки прямоугольника (8.1.1.6).

п. 5, 6, 8. Свойства и признаки ромба и квадрата / 1 /
- знать определения ромба и квадрата (8.1.1.6);
- доказывать и применять свойства и признаки ромба и квадрата при решении задач на вычисление, а также задач на доказательство и построение (8.1.1.6).

Проверочная работа по теме «Параллелограмм, его свойства и признаки» / 1 /.

п. 7. Свойства и признаки трапеции / 1 /
- знать определение трапеции, ее виды и свойства (8.1.1.11);
- уметь применять свойства трапеции при решении задач (8.1.1.11).

п. 9. Теорема Фалеса / 1 /
- знать и применять теорему Фалеса (8.1.1.7);
- знать и применять теорему о пропорциональных отрезках (8.1.1.8);
- делить отрезок на n равных частей с использованием циркуля и линейки (8.1.1.9);
- строить пропорциональные отрезки (8.1.1.10).

п. 10, 11. Средняя линия треугольника и трапеции / 1 /
- знать определения средних линий треугольника и трапеции (8.1.1.12, 8.1.1.13);
- доказывать и применять свойство средней линии треугольника (8.1.1.12);
- доказывать и применять свойство средней линии трапеции (8.1.1.13).

Решение задач по теме «Трапеция. Средняя линия треугольника и трапеции» / 1 /.

п. 12. Замечательные точки треугольника / 1 /
- знать и применять свойства медиан, биссектрис, высот и серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (8.1.3.1).

п. 13. Решение задач по теме «Многоугольники. Исследование четырехугольников» / 1 /

– повторить материал, изученный в первом разделе;
– подготовиться к СОР.

СОР «Многоугольники. Исследование четырехугольников» / 1 /.

Итоговый урок / 1 /.

2-я ЧЕТВЕРТЬ

II. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

п. 14. Косинус острого угла / 1 /

– знать определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника и применять его при решении задач (8.1.3.2).

п. 15. Теорема Пифагора и теорема, обратная ей / 2 /

– доказывать и применять теорему Пифагора (8.1.3.3);
– использовать теорему, обратную теореме Пифагора при решении задач (8.1.3.3).

п. 16. Тригонометрические функции острого угла / 2 /

– знать и применять определения синуса, тангенса и котангенса острых углов прямоугольного треугольника (8.1.3.2);
– доказывать и применять свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины его прямого угла (8.1.3.4);
– строить острый угол по известному значению его синуса, косинуса, тангенса или котангенса (8.1.3.5).

Проверочная работа по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» / 1 /.

п. 17. Свойства тригонометрических функций острого угла / 1 /

– знать и применять зависимости значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса острых углов от их величин (8.1.3.23);
– знать и применять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60° (8.1.3.6, 8.1.3.7);
– знать и применять взаимосвязь между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом острых углов, равных α и $(90° - \alpha)$ (8.1.3.23).

п. 18. Тригонометрические тождества / 1 /

– выводить формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и применять ее при решении задач (8.1.3.21);
– доказывать и применять тригонометрические тождества $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (8.1.3.22);
– находить значения $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ по данному значению одного из них (8.1.3.24).

п. 19. Решение прямоугольных треугольников / 2 /

– применять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30°, 45°, 60° для нахождения элементов прямоугольного треугольника (8.1.3.7);
– находить неизвестные стороны и углы прямоугольного треугольника по двум данным элементам (8.1.3.8).

Проверочная работа по теме «Решение прямоугольных треугольников» / 1 /.

п. 20. Решение задач по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» / 1 /

– повторить материал, изученный во втором разделе;
– подготовиться к СОР.

СОР «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» / 1 /

Итоговый урок / 1 /.

3-я ЧЕТВЕРТЬ

III. ПЛОЩАДИ ФИГУР

п. 21. Понятие площади. Площадь прямоугольника / 3 /

– знать и применять определение площади многоугольника и ее свойства (8.1.3.9);
– знать понятия равновеликих и равносоставленных фигур и применять их свойства при решении задач (8.1.3.10).

п. 22. Площадь параллелограмма и треугольника / 3 /

– выводить и применять формулы площади параллелограмма, ромба (8.1.3.11);
– выводить и применять формулы площади треугольника (8.1.3.12).

Проверочная работа по теме «Площадь параллелограмма и треугольника» / 1 /.

п. 23. Площадь выпуклого четырехугольника / 2 /

– уметь находить площадь выпуклого четырехугольника, зная длины его диагоналей и угол между ними (8.1.3.11, 8.1.3.13).

п. 24. Площадь трапеции / 3 /

– выводить и применять формулу площади трапеции (8.1.3.13).

Проверочная работа по теме «Площади фигур» / 1 /.

п. 25. Решение задач по теме «Площади фигур» / 3 /

– повторить материал, изученный в третьем разделе;
– подготовиться к СОР.

СОР «Площади фигур» / 1 /.

Итоговый урок / 1 /.

Резерв – 4 урока.

4-я ЧЕТВЕРТЬ

IV. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

п. 26. Координаты: точки на плоскости, середины отрезка. Расстояние между двумя точками / 2 /

– вычислять расстояние между двумя точками на плоскости по их координатам (8.1.3.14);
– находить координаты середины отрезка (8.1.3.15, 8.1.3.16).

п. 27. Уравнения линий на плоскости. Уравнения прямых / 1 /

– записывать общее уравнение прямой и уравнение прямой, проходящей через две данные точки: $ax + by + c = 0$,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$ (8.1.3.19);

– строить прямую, зная ее уравнение (8.1.3.19).

п. 28. Уравнение окружности. Взаимное расположение прямой и окружности / 1 /

– знать уравнение окружности с центром в точке (a; b) и радиусом r: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (8.1.3.17);

– строить окружность по заданному уравнению (8.1.3.18).

п. 29. Применение координат к определению тригонометрических функций углов от 0° до 180° / 2 /

– уметь решать простейшие задачи в координатах (8.1.3.20);

– знать и применять основные тригонометрические тождества (8.1.3.22);

– находить значения $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ по данному значению одного из них (8.1.3.24).

п. 30. Решение задач по теме «Прямоугольная система координат на плоскости» / 2 /

– повторить материал, изученный в четвертом разделе;

– подготовиться к СОР.

СОР «Прямоугольная система координат на плоскости» / 1 /.

Итоговый урок / 1 /.

Решение задач на повторение курса геометрии 8 класса / 4 /.

СОЧ «Прямоугольная система координат. Итоговое повторение» / 1 /.

Итоговый урок / 1 /.

ЛИТЕРАТУРА

1. Типовая учебная программа по предмету «Геометрия» для 7–9 классов уровня основного среднего образования по обновленному содержанию. – Астана: Национальная академия образования им. И. Алтынсарина, 2017.

2. Геометрия: учебник для учащихся 7 класса общеобразовательной школы / Г. Н. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030, 2016.

3. Геометрия: методическое руководство для учителей 7 класса общеобразовательной школы / Г. Н. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030, 2016.

4. Геометрия: учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы + CD / Г. Н. Солтан, А. Г. Солтан, А. Ж. Жумадилова. – Кокшетау: Келешек-2030, 2018.

5. Математическая культура школьника / Д. Икрамов. – Ташкент, 1981.

6. Педагогические технологии адаптивной школы / Н. П. Капустин. – М: Академия, 1999.

7. Руководство по критериальному оцениванию для учителей основной и общей средней школ: учебно-метод. пособие / под ред. О. И. Можаевой, А. С. Шилибековой, Д. Б. Зиеденовой. – Астана: АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы», 2016.

Список интернет-ресурсов[5]

http://100ballov.kz/course/view.php?id=94
http://ege-study.ru/materialy-ege/sinus/
http://www.cleverstudents.ru/vectors/midpoint.html
http://ru.science.wikia.com/wiki/Рене_Декарт
http://ru.science.wikia.com/wiki/Готфрид_Лейбниц

[5] **Примечание.** Доступ к указанным интернет-ресурсам может отсутствовать в связи с изменением структуры или адресов сайтов.

СОДЕРЖАНИЕ

СОЛТАН Геннадий Николаевич
СОЛТАН Алла Евгеньевна
ЖУМАДИЛОВА Аманбала Жумадиловна

Геометрия

Методическое руководство
для учителей 8 класса
общеобразовательной школы

Редактор	С. Ш. Алибеков
Технический редактор	А. М. Коновалова
Дизайн обложки	Е. Е. Велькер
Корректоры	М. О. Джусупова
	С. В. Юрченко

Подписано в печать 23.04.2018.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Объем 6,25 усл. печ. л.
Заказ № 613020. Тираж 2000 экз.

Код **6**13020

ТОО «Келешек-2030»
Республика Казахстан,
020000, г. Кокшетау.
Офис издательства: ул. Абая, 112а,
тел.: 8 (7162) 72-29-43 (приемная).
Отдел продаж: ул. М. Горького, 17а,
тел.: 8 (7162) 44-18-64, +7 708 444 18 64,
моб. тел.: +7 702 781 06 78,
+7 705 745 09 75.
http://www.keleshek-2030.kz, E-mail: torg@keleshek-2030.kz