**Математикадан Республикалық олимпиаданың аудандық кезеңі**
**2016 – 2017 оқу жылы.**

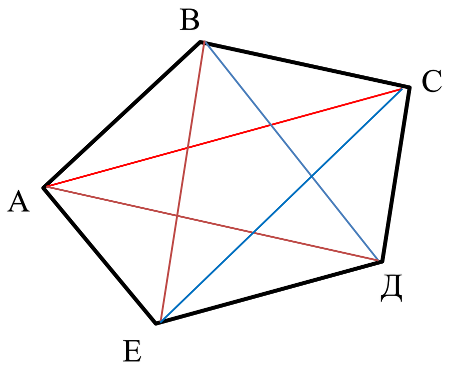
**Амангелді Садыков**
**Шығыс Қазақстан облысы Бородулиха ауданы Зубаир ауылы**

1. Кез келген дөңес бесбұрыштың бес диагоналінің ішінен, олардан үшбұрыш құруға болатындай әрқашанда үшеуін таңдауға болатынын дәлелдеңіз.

2. Қосындыны табыңыз
$$S = \sin^6 1^\circ + \sin^6 2^\circ + \sin^6 3^\circ + \cdots + \sin^6 87^\circ + \sin^6 88^\circ + \sin^6 89^\circ.$$

3. Натурал сандар жиынында теңдеуді шеші $(m+1)! + (n+1)! = m^2n^2$.

## 11 сынып. I тур




**1 есеп.** Шешуі: Бесбұрыштың бес диагоналі болады, оларды екі түске бояймыз. Олай болса, Дирихле принципі (m > nk) бойынша 5>2·2, ендеше бес диагоналінің ішінен ( m = 5,k = 2) әрқашан үшбұрыш құруға болатындай үшеуін таңдауға болады. Яғни, $C_3^5 = \frac{5\cdot4\cdot3}{6} = 10$ тең үшбұрыш ішінен қабырғалары бір түске боялған бір үшбұрыш әрқашан табылады. АС + А Д > ВЕ, өйткені АВ + АЕ > ВЕ, ал АС > АВ және АД > АЕ.

**2 есеп.** Қосындыны табыңыз.

$S = \sin^6 1^0 + \sin^6 2^0 + \sin^6 3^0 \ldots + \sin^6 89^0$

**Шешуі:** $\sin 89^0 = \cos 1^0$, $\sin 88^0 = \cos 2^0$

$\sin^6 1^0 + \sin^6 2^0 + \sin^6 3^0 + \ldots + \sin^6 89^0 = (\sin^6 1^0 + \cos^6 1^0) + (\sin^6 2^0 + \cos^6 2^0) + \ldots +$

$+(\sin^6 44^0 + \cos^6 44^0) + \sin^6 45^0$

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ формуласын пайдаланайық.

$(\sin^6 1^0 + \cos^6 1^0) + (\sin^6 2^0 + \cos^6 2^0) + \ldots +$

$(\sin^6 44^0 + \cos^6 44^0) + \sin^6 45^0 = 1 - 3\sin^2 1^0\cos^2 1^0 + 1 - 3\sin^2 2^0\cos^2 2^0 + \ldots + 1 -$

$- 3\sin^2 44^0\cos^2 44^0 + \sin^6 45^0 = 44 - 3(\sin^2 1^0 + \cos^2 1^0 + \sin^2 2^0\cos^2 2^0 + \ldots +$

$+\sin^2 44^0 \cos^2 44^0) + \sin^6 45^0 = 44 - 3((\sin^2 1^0\cos^2 1^0 + \sin^2 44^0\cos^2 44^0) + (\sin^2 2^0 \cos^2 2^0 +$

$+ \sin^2 43^0\cos^2 43^0) + \ldots + (\sin^2 22^0\cos^2 22^0 + \sin^2 23^0\cos^2 23^0)) + \sin^6 45^0$

Енді келесі теңдікті пайдаланайық

$\sin\alpha\cos\alpha + \sin(45 - \alpha) \cos(45 - \alpha))^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin(45 - \alpha) \cos(45 - \alpha)=0,25$

сонымен, $44 - 3((\sin 1^0\cos 1^0 + \sin 44^0\cos 44^0)^2 - 2 \sin 1^0\cos 1^0\sin 44^0\cos 44^0 + \ldots +$

$+ \sin 22^0\cos 22^0 + \sin 23^0\cos 23^0)^2 - 2\sin 22^0\cos 22^0\sin 23^0\cos 23^0) + \sin^6 45^0 =$

$= 44 - 3(0,25 + 0,25 + \ldots + 0,25) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = 44 - 3\cdot 0,25\cdot 22 + 0,125 = 27,625$

**Жауабы: 27,625**

**3 есеп. Шешуі:**

$m! > m^4$ ( $m \geq 7$) яғни $(m - 1)! > m^3$

енді $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m - 2)(m - 1) > m^3$ екендігіне көз жеткізейік, ол үшін

$(m - 4)(m - 3)(m - 2)(m - 1) > m^3$ болатындығын көрсетсек жеткілікті

$m^3(m - 10) + 35m^2 - 50m + 24 > m^3$

$m^3(m - 10) > m^3$ $(m > 11)$. Ал, $35m^2 - 50m + 24 > 0$ кез келген m үшін оындалады. Сонда $m^3(m - 10) + 35m^2 - 50m + 24 > m^3$ $(m \geq 7)$. Демек, $m! > m^4$ ендеше, $(m + 1)! > m^4$ және $(n + 1)! > n^4$ $(m \geq 5, n \geq 5)$.

Осыдан, $(m + 1)! + (n + 1)! > m^4 + n^4 \geq 2m^2n^2 > m^2n^2$. Егерде есептің берілгеніне жүгінсек,онда келесі теңсіздікті аламыз. $(m + 1)! + (n + 1)! \geq m^2n^2$. Ендігі жағдайда m мен n–ң қандай мәндерінде теңдіктің орындалатындығын анықтайық. $(m + 1)! + (n + 1)! = m^2n^2$ $(1\leq m < 5, 1\leq n < 5)$

**1)** $m < n$ және $n = m + 1$ болсын делік.

$m = 1, n = 1+1$, $2! + 3! \neq 1^2 \cdot 2^2$

$m = 2, n = 2+1$ $3! + 4! \neq 2^2 \cdot 3^2$

m = 3, n = 3+1     4! + 5! = $3^2 \cdot 4^2$  демек, m = 3, n = 4

**2)** $m \geq n$, m = n + 1 жағдайында m = 4, n = 3. m = n болғанда  $2(m + 1)! = m^4 \Rightarrow$ $\frac{(m+1)!}{m^4} = \frac{1}{2}$ бұлай болуы мүмкін емес,  өйткені $(m + 1)! > m^4$ $(m \geq 5)$

**Жауабы: ( 3;4), (4;3)**

**11 сынып**

**2 тур**

4. $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ және $x^4 + y^4$ сандары рационал екені белгілі. $x + y$ саны міндетті түрде рационал бола ма?

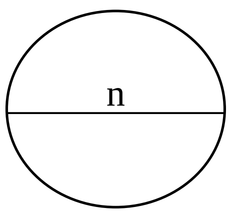
5. $ABC$ үшбұрышы $\omega$ шеңберіне іштей сызылған. Осы шеңбердің $AD$ хордасы $ABC$ үшбұрышының биссектрисасы болады және $BC$ кесіндісін $L$ нүктесінде қияды. $\omega$ шеңберінің $DE$ хордасы $AC$ қабырғасына перпендикуляр және оны $K$ нүктесінде қияды. Егер $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$ болса, онда $\frac{AK}{KC}$ қатынасын табыңыз.

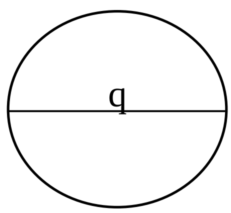
6. Бүкіл $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ үшін
$$yf\left(\frac{f(x)}{y} + 1\right) = x + f(y)$$
қатынасын қанағаттандыратын барлық $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциясын табыңыз.

**4 есеп. Шешуі:** Есептің шешімін геометриялық тұрғыдан қарастырайық.

**Мысал:** Бірінші шеңбердің ұзындығы m см диаметрінің ұзындығы n см және екінші шеңбердің ұзындығы p см, ал диаметрі q см-ге тең болсын делік.

(m,n,p,q ∈ Q)

1) 

2) 


$x = \frac{m}{n}$  және  $y = \frac{p}{q}$  деп белгілейік, сонда

$x^2 + y^2 = \frac{m^2}{n^2} + \frac{p^2}{q^2} = \frac{a}{b}$  -  рационал сан

$x^3 + y^3 = \frac{m^3}{n^3} + \frac{p^3}{q^3} = \frac{c}{d}$ - иррационал сан

$x^4 + y^4 = \frac{m^4}{n^4} + \frac{p^4}{q^4} = \frac{R}{l}$ - рационал сан

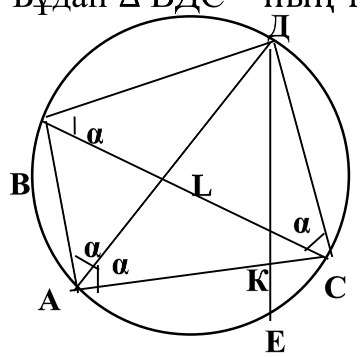
бірақ, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ рационал сан емес, өйткені

$\frac{m}{n} = \pi$ және $\frac{p}{q} = \pi$ болады, ал $\pi$ – рационал сан емес, ендше $x + y = 2\pi$ рационал сан емес

**Жауабы: міндетті емес**

**5 есеп**. **І тәсіл. (Косинустар теоремасын қолдану) Шешуі:**

**1)** $\angle$ВАД $= \angle$ САД $= \alpha$ делік. Сонда $\angle$ДВС $= \angle$ДСВ $= \alpha$ болады, өйткені бұл бұрыштар өз ара тең доғаларға тіреліп тұр. Бұдан $\Delta$ ВДС – ның тең бүйірлі екендігі шығады, яғни ВД = СД (1)




Биссектрисаның қасиеті бойынша

$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$ яғни $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 2AB$ (2)

**2)** $\Delta$АДК – дан $\cos\alpha = \frac{АК}{АД}$

$\Delta$АДВ және $\Delta$АДС – дан АД$^2$ + АС$^2$ – 2АД$\cdot$ АС$\cos\alpha$ =

=АД$^2$ + АВ$^2$ – 2АД $\cdot$ АВ $\cos\alpha$

4АВ$^2$ − 4АВ$\cdot$АД $\cos\alpha$ = АВ$^2$ – 2АД $\cdot$ АВ $\cos\alpha$ ⇒АВ(3АВ – 2АД $\cos\alpha$)=0,

АВ≠0. Олай болса, 3АВ=2АД $\cos\alpha$ ⇒ $\cos\alpha = \frac{3АВ}{2АД} = \frac{АК}{АД} \Rightarrow \frac{3}{2}$ АВ = АК,

АВ = $\frac{1}{2}$ АС болғандықтан, АК = $\frac{3}{4}$ АС

**3)** КС = АС – АК болғандықтан, КС = АС – $\frac{3}{4}$ АС= $\frac{1}{4}$ АС

Сонымен, КС = $\frac{1}{4}$ АС, демек, $\frac{АК}{КС} = \frac{\frac{3}{4}АС}{\frac{1}{4}АС} = 3$

**Жауабы: $\frac{АК}{КС}$ =3**

**ІІ тәсіл: ( Косинустар және Птолемей теоремасын қолдану)**

**1) ВД = СД (1)**

**2)** $\Delta$ВДС – дан косинустар теоремасы бойынша

$BC^2 = BД^2 + CД^2 - 2BД \cdot CД\cos(180 - 2\alpha) = 2CД^2 + 2CД^2 \cos 2\alpha = 2CД^2(1 + \cos 2\alpha)$

$\Rightarrow BC = 2CД\cos\alpha,\ \cos\alpha = \frac{BC}{2CД}$,

Ендеше , $\frac{BC}{2CД} = \frac{AK}{AД} \Rightarrow BC \cdot AД = 2CД \cdot AK$ (3)

**3)** Птолемей теоремасы бойынша $BC \cdot AД = AC \cdot BД + AB \cdot CД$ немесе
(1) және (2) теңдіктер бойынша $BC \cdot AД = 2AB \cdot CД + AB \cdot CД = 3AB \cdot CД$
(3) теңдік бойынша $2CД \cdot AK = 3AB \cdot CД = \frac{3}{2} AC \cdot CД \Rightarrow AK = \frac{3}{4} AC$

**Әрі қарай I тәсілдегідей.**

**6 есеп. Шешуі:** $yf\left(\frac{f(x)}{y} + 1\right) = x + f(y)$

**1)** $y = f(x)$ деп берілген қатынасқа қояйық

$f(x)f\left(\frac{f(x)}{f(x)} + 1\right) = x + f(f(x)) \Rightarrow 2f(x)f = x + f(f(x))$ ,осыдан

$f = \frac{x + f(f(x)}{2f(x)}$

***2)*** $y = f(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ деп қойсақ

$f(x)f\left(\frac{f(x)}{f(x)} + 1\right) = 2x \Rightarrow 2f(x)f = 2x$ бұдан $f = \frac{x}{f(x)}$

***Жауабы:*** $\boldsymbol{f = \frac{x + f(f(x))}{2f(x)}}$ , $\boldsymbol{f = \frac{x}{f(x)}}$ ***R→R***