II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2009 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

9 класс, 2 день

4. Рассмотрим функции $f(x)=|x-1|-|x-2|$ и $g(x)=|x-3|$.
   a) Нарисуйте график функции $f(x)$
   b) Определите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)$ и $g(x)$

5. Пусть точки K и P симметричны основанию H высоты BH треугольника ABC относительно его сторон AB и BC соответственно. Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC (или их продолжениями) — основания высот треугольника ABC.

6. В зале находятся $n>2$ человек. Доказать, что среди них найдутся 2 человека с одинаковым количеством знакомых.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2009 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

9 класс, 1 день

1. Решить уравнение $x^2-y^2-x+y=10$ в натуральных числах.

2. Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

3. Сколькими способами можно представить натуральное число n в виде k натуральных слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2009 года

Время работы – 4 часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9-класс, 1-день

Задача1.Решение: Преобразовываем обе части данного уравнения:

$x^2+y^2-x+y=x^2+y^2$-(x-y)=(x-y)(x+y)-(x-y) Откуда, (x-y)(x+y-1)=1× 10 и (x-y)(x+y-1)=2× 5

Таким образом, получим следующие четыре системы уравнении:

1)$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y-1=10 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} x-y=10 \\ x+y-1=1 \end{cases}$

3)$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y-1=5 \end{cases}$ или 4) $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y-1=2 \end{cases}$

Решив полученные системы уравнении имеем, x=6, y=5; x=6, y=-4; x=4, y=2; x=4, y=-1

Ответ: (6; 5), (4;2)

Задача2. Решение: Пусть точки E, M и K соответственно являются точками касания стороны BC и продолжении сторон AB и AC данного треугольника ABC (рис.1)

AM и AK отрезки касательных проведённых через точку A, поэтому, AM=AK , анологично, BM=BE и CE=CK, то

AM=AB+BM=AB+BE и AK=AC+CK=AC+CE
откуда, 2AM=AB+BE+CE+AC=AB+BC+AC

Следовательно, *AM*=$\frac{AB+BC+AC}{2}$

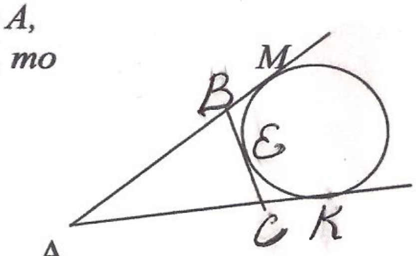


Рис.1.

Задача 3. Решение. Решение задачи требует упорядочить сумму натуральных чисел, равную n состоящую из R натуральных слагаемых. По условию задачи представления отличающиеся порядком слагаемых считаются различными, то натуральное число n в виде R натуральных слагаемых можно представить

R(R-1)(R-2)…3·2·1способами. Например, пусть n=$\sum_{i=1}^{R} a_i$

при i=1. n=a_1, i=2 n=$a_1+a_2=a_2+a_1$ то всего можно представить 2! способами. i=3 n=$a_1+a_2+a_3=a_1+a_3+a_2=a_2+a_1+a_3=a_2+a_3+a_1$ Следовательно, имеется 3! способов представить натуральное число n в виде R натуральных слагаемых. Аналогично, если i=R, то выполнить условия задачи можно R! способами. <u>**Ответ:R!**</u>

9-класс. 2-день

Задача 4. Решение. Если $x\in(-\infty;1]$, то $f(x)=-1$.

В промежутке $x\in[1;2]$ имеем $f(x)=2x-3$

и если $x\in[2;+\infty)$ то $f(x)=1$

Так же, $x\in(-\infty;3]$ и , $x\in[3;+\infty)$ при этом

д$(x)=-x+3$ *и* д$(x)=x-3$

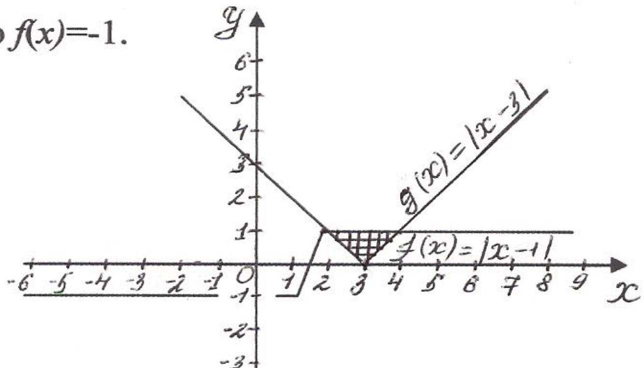


РИС.2

а) Строим график функции $f(x)$ (рис.2)

б)Определяем площадь фигуры, ограниченной графиками функции $f(x)$ и д(x)

Длина высоты треугольника равна 1, а а длина основания равна 2 единичным отрезкам. $S=\frac{2\cdot 1}{2}=1$. Ответ:1кв.ед.

Задача 5. Решение. На основании АС треугольника АВС, как на диаметре построим окружность через две точки Е и М пересечения окружности СО сторонами треугольника АВ и ВС проведём прямую. Предположим, что отрезок КР принадлежит

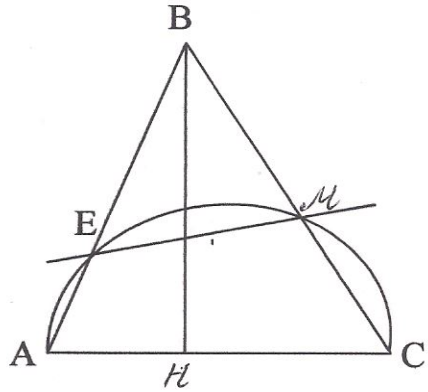


рис.3а

этой прямой (рис.3а). По условию задачи точки К и Р симметричны основанию Н высоты ВН относительно сторон АВ и ВС треугольника АВС. Поэтому, учитывая симметричности точек К и Р, тем самым определяем их принадлежность прямой ЕМ. Следовательно, наше предположение оказалось верно (рис.3б) Соединив точку Е с точкой С и точку М с точкой А получаем два угла опирающиеся на диаметр АС окружности, откуда эти углы

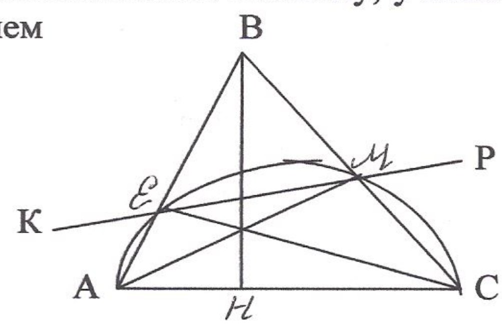


рис.3б

прямые. **Таким образом, точки Е и М – основания высот треугольника АВС.**

Задача 6. Решение. Людей находящихся в зале можно сгруппировать

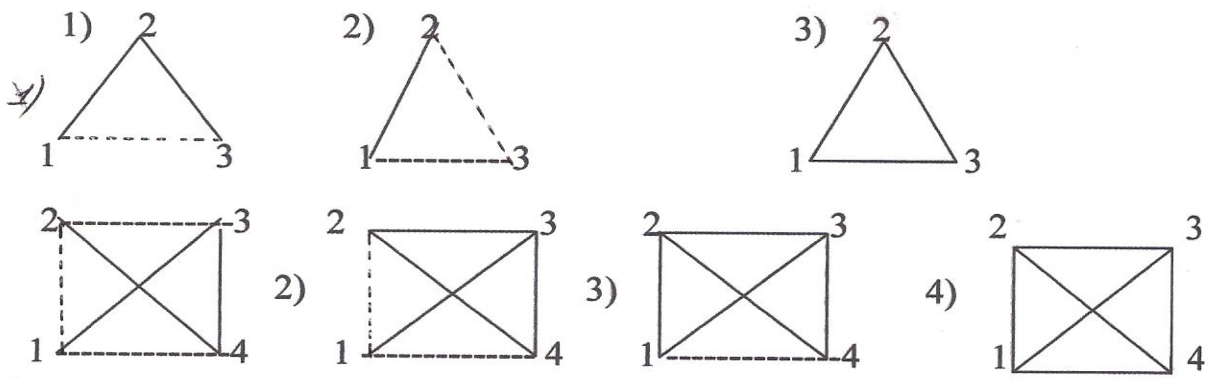
$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2!}$-1 (n>2) способами. Для того чтобы задача имела решение по крайней мере два знакомых человека должно оказаться в одной группе. Если n=3, то в лучшем случае каждый человек имеет не более двух знакомых. По принципу Дирихле зал условно делим на две части. В одну часть зала поместим человека имеющегося одного знакомого, а во вторую часть человека имеющегося двух знакомых. В этом случае третьего человека придется поместить в одну из этих частей зала. Следовательно, найдутся два человека с одинаковым количеством знакомых

Допустим, n=4. В таком случае у каждого человека имеется не более трех знакомых и зал делится условно на 3 части, а оставшегося человека можем поместить в любую часть зала в зависимости от количества его знакомых. Таким образом, количество людей в зале возможно n=2R или **n=2R-1?????** В любом случае найдутся 2 человека с одинаковым количеством знакомых. Теперь попробуем решить задачу с помощью графа.Вершины графа – люди находящиеся в зале. При этом если в зале два человека знакомы то вершины графа соединяем прямой линией, а если не знакомы, то пунктиром

n=3

n=4

1)



С помощью прямых линии графа можем определить два человека имеющих одинаковое количество знакомых.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2009 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

10 класс, 1 день

1. Пусть a, b, c - действительные числа такие, что $a+b+c=0$ и $a^4+b^4+c^4=50$. Определите $ab+bc+ca$.

2. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что угол BPC - прямой.

3. Докажите, что существует 2009 последовательных натуральных составных чисел.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2009 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

10 класс, 2 день

4. Докажите, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, для которых $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, выполнено неравенство $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 2^n$

5. В зале находятся n>2 человек. Доказать, что среди них найдутся 2 человека с одинаковым количеством знакомых.

6. Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая, K и M — проекции точек A и B на эту прямую, P — середина AB. Докажите, что треугольник KMP — равносторонний.

10-класс, 1-день

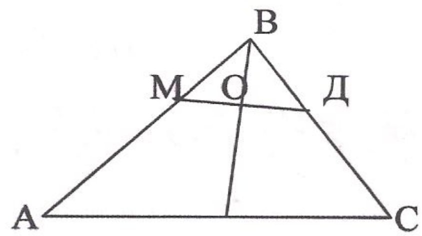
Задача 1. Решение.1) $(a+в+c)^2= a^2+в^2+c^2+2(aв+вc+ca)$ *т.к.* $a+в+c=0$ то

$a^2+в^2+c^2+2(aв+вc+ca)=0$ *Откуда* , $aв+вc+ca=-\frac{a^2+в^2+c^2}{2}$

1) $(a^2+в^2+c^2)^2=a^4+в^4+c^4+2(a^2в^2+в^2c^2+c^2a^2)=50+2(a^2в^2+в^2c^2+c^2a^2)$
2) $(aв+вc+ca)^2= a^2в^2+в^2c^2+c^2a^2+2aвc(a+в+c)$ $\quad a+в+c=0$ итак, $(aв+вc+ca)^2= a^2в^2+в^2c^2+c^2a^2$
4) $(aв+вc+ca)^2=\frac{50+2(a^2в^2+в^2c^2+c^2в^2)}{4}$ следовательно $2(a^2в^2+в^2c^2+c^2a^2)=50\Longrightarrow$

$= a^2в^2+в^2c^2+c^2a^2=25$ или $(aв+вc+ca)^2=25\Longrightarrow aв+вc+ca=5$ и $aв+вc+ca=-5$

Задача 2. Решение *Д*-точка касания вписанной окружности со стороной ВС данного треугольника. Биссектриса ВО серединный перпендикуляр отрезка МД (рис. 4а)

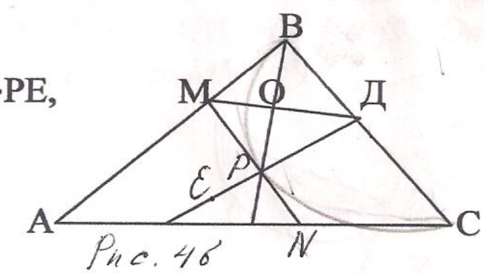


(рис. 4а)

На стороне ВС как на диаметре построим окружность. Пусть Р и точка пересечения окружности с биссектрисой угла В, а точка Е является точкой пересечения вписанной окружности с продолжением отрезка РД. (рис.4б)

Итак, MN и ЕД две хорды одной окружности пересекющиеся в точке Р. Поэтому MP·PN= РД·РЕ, MP=ДР ибо ВР серединный перпендикуляр.

Рис.4б



Таким образом, PN=PE $\quad R_p^{-2\alpha}$ (ЕД)=MN т.е. при повороте вокруг точки Р на 2α градусов против часовой стрелки хорда ЕД переходит в хорду MN (где $2\alpha=\angle$МРД)

Следовательно и по условию задачи точка Р также является точкой пересечения прямой MN и биссектрисой угла В. Угол ВРС прямой ибо он опирается на диаметр окружности. (рис.4в)

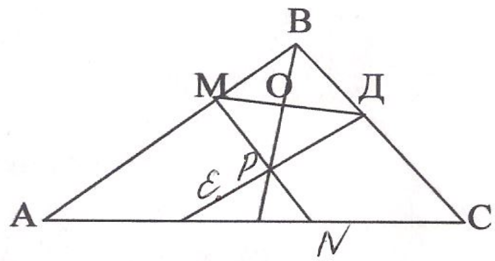


рис.4в

В случае, если один из углов треугольника являются прямым или тупым, то прямая MN и биссектриса угла В пересекаются вне треугольника.

Задача 3. Решение: Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ члены последовательности n первых натуральных простых чисел

То $a_2 - a_1 = 1$

$a_3 - a_2 = 2$

$a_4 - a_3 = 2$

……………

$a_n - a_{n-1} = 2t(t\geq1,\ t\in N)$ ибо среди простых чисел кроме чётного числа 2 другого чётного числа не существует. Поэтому, 2t является разностью двух любых простых чисел. Т.к. $a_2 - a_1 < a_3 - a_2 < \ldots < a_{n-2} - a_{n-3} \leq a_{n-1} - a_{n-2} < a_{n-1}$ то 2t-1=2009, 2t=2010 , t=1005 Следовательно, **существует 2009 последовательных составных натуральных чисел.**

Задача 4. Так как при а,в≥0 имеет место неравенство $\frac{a+в}{2} \geq \sqrt{aв}$

Поэтому, $\frac{1+x_i}{2} \geq \sqrt{x_i}$ (i=1,2,…,n)Следовательно, $\frac{1+x_1}{2} \geq \sqrt{x_1}$, $\frac{1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_{2,\ldots,}}$ $\frac{1+x_n}{2} \geq \sqrt{x_n}$ Перемножив эти неравенства, получим

$\frac{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}{2^n} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2, \ldots, x_n}$ т.к. $x_1 \cdot x_2, \ldots, x_n = 1$ в итоге имеем

$x_1 \cdot x_2, \ldots, x_n \geq 2^n$

Задача 6. Решение. Положим *АВ= а, ∠ВКР=α и ∠СВК=β. АВКМ* прямоугольная трапеция а РД средняя линия этой трапеции. Таким образом, *ДК=ДМ и ∠АМР=α ∠МРК=2α ∠ВРК =120-(α+β) и ∠АРМ=60-(α-β) Откуда ∠МАС=60-β (рис.5) Итак, РМ= РК . Теперь докажем,что МК =РК*

$\frac{СК}{ВС} = sin\beta \Longrightarrow a\ sin\beta$

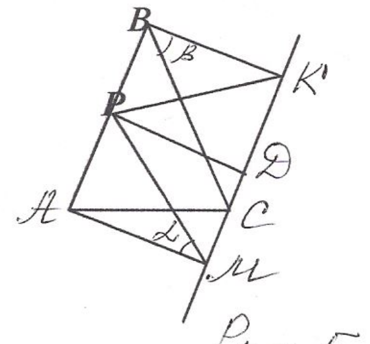


Рис. 5

$\frac{СМ}{АС} = sin(60\text{-}\beta) \Longrightarrow$ *R>1* $СМ=asin(60\text{-}\beta)$

$МК=МС+СК \Longrightarrow МК= a(\ sin\beta+ sin(60\text{-}\beta))=$

$2sin30cos(30\text{-}\beta)=acos\ (30\text{-}\beta)$

$КД=\frac{1}{2}МК =\frac{1}{2}\ acos\ (30\text{-}\beta)$

$\frac{ВК}{СК} = cos\ \beta,\ \frac{АМ}{АС} = cos\ (60\text{-}\beta) \Longrightarrow ВК=acos\ \beta,\ АМ= acos\ (60\text{-}\beta)$

$РД=\frac{ВК+АМ}{2}$, $РД=\frac{acos\ (60-\beta)+cos\beta}{2} =\frac{a2cos30cos\ (30-\beta)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ acos\ (30\text{-}\beta)$

$РК^2= РД^2+ДК^2$, $РК^2=\frac{3}{4}a^2\ cos^2(30\text{-}\beta)+\frac{1}{4}\ a^2cos^2(30\text{-}\beta)= a^2cos^2(30\text{-}\beta) \Longrightarrow$

$РК= a\ cos\ (30\text{-}\beta)$ ***Итак, ∆КМР - равносторонний***

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2009 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

11 класс, 1 день

1. Пусть a, b, c - действительные числа такие, что $a+b+c=0$ и $a^4+b^4+c^4=50$. Определите $ab+bc+ca$.

2. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что угол BPC - прямой.

3. Докажите, что для любого натурального n найдутся n последовательных натуральных чисел, среди которых ровно одно простое.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2009 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

11 класс, 2 день

4. Определите все целые числа b, c такие, что уравнение $x^2-bx+c=0$ имеет 2 действительных корня x_1, x_2, для которых $x_1^2+x_2^2=5$.

5. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, в которой углы C и B – прямые. На стороне AD как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точках M и N. Докажите, что $BM*MC=AB*CD$.

6. Внутри квадрата со стороной 1 находится несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что существует прямая, пересекающая не менее четырех из этих окружностей.

11-класс, 1-день

Задача3. Решение. Допустим, имеется последовательность натуральных простых чисел, что $a_1<a_2 < a_3 \dots < a_{R-1} < a_R < \dots<a_{n-1} < a_n$ Число простых чисел бесконечно, поэтому при $n \to\infty$ для любой $a_R - a_{R-1}$ разности найдётся некоторая разность $a_{R+m} - a_{R-1+m}$ такая, что выполняется следующее неравенство$a_R - a_{R-1} < a_{R+m} - a_{R-1+m}$, а $a_{R+m} - a_{R-1+m} = 2t$

(R,t, m≥1; R,m<n)Следовательно, для любого натурального n найдутся

$a_{R-1+m,}$ $a_{R-1+m,}{}^{+1}$, $a_{R-1+m,}{}^{+2}$,…, $a_{R-1+m,}{}^{+n-2}$, $a_{R+m}{}^{-1}$ или

$a_{R-1+m,}{}^{+1}$, $a_{R-1+m,}{}^{+2}$, $a_{R-1+m,}{}^{+3}$,…, $a_{R-1+m,}{}^{+n-1}$, a_{R+m}. n=2t последовательных натуральных чисел, среди которых ровно одно простое.

11-класс, 2-день

Задача 4. Решение. $\frac{в^2}{4}$ - c>0, c< $\frac{в^2}{4}$ $(x_1 + x_2)^2$=5+x_1x_2 По теореме Виета $x_1 + x_2$=в и x_1x_2=c, а $(x_1 + x_2)^2$=$в^2$ т.е. 5+2c=$в^2$

Откуда, c=$\frac{в^2-5}{2}$ и в=$\sqrt{5+2c}$ Данное **<u>уравнение,,,,,,,,,</u>** перепишем в виде

$x^2 - вx + \frac{в^2-5}{2} = 0$. $\frac{в^2}{4}$ - $\frac{в^2-5}{2}$=$\frac{10-в^2}{4}$ >0, $в^2 < 10$ т.е. -$\sqrt{10}$ <в<$\sqrt{10}$ 5+2c<10 и 5+2c≥0⟹- $\frac{5}{2} \le c < \frac{5}{2}$ в, c принимают целые значения в промежутках в∈[−3; 3] и в∈[−2; 2] итак, в пройденных промежутках и при c<$\frac{в^2}{4}$ данное уравнение имеет два деиствительных корня x_1, x_2 , для которых $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 5$

Задача 5. Решение. *△АДF* прямоугольный то *∠FДC* – прямой. Поэтому *FДCB* прямоугольный четырёхугольник. Откуда, *BF=CД. АД²+ДМ²*
АД²=AN²+ДN², AM²+ДМ²=AN²+ДN² *(рис.6а)*

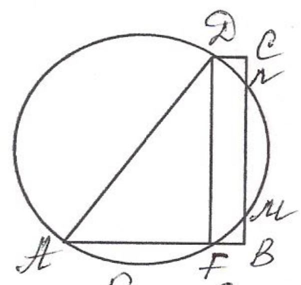


Рис. 6а

AM²=AB²+BM², ДМ²=ДC²+CM²

AN²=AB²+BN², ДN² =ДC²+CN²

AB²+BM²+ДC²+CM²=

AB²+BN²+ДC²+CN²⟹BM²+CM² = BN²+CN²⟹

BN²-BM²=CM²-CN²

(BN-BM)(BN+BM)=(CM-CN)(CM+CN)
⟹BN+BM=CM+CN⟹BM+MN+BM=CN+MN+CN⟹

*BM=CN*то *BN=MC*

Через точку *B* проведём касательные *BE и BK*

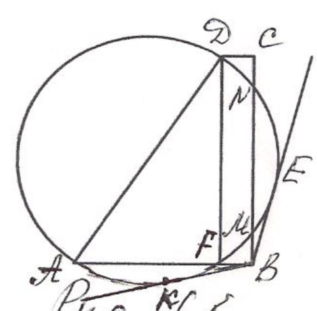


Рис. 6б.

(рис.6б) *$BE=BK$, $BE^2=B\cdot BM=BM\cdot MC$*

$BK^2=AB\cdot BF=AB\cdot CД$ Следовательно, *$BM\cdot MC=AB\cdot CД$*

Задача 6. Решение. Очевидно, что задача имеет решение в том случае, если количество окружностей находящиеся внутри квадрата не меньше четырёх.

1-случай. Окружности внутри квадрата имеют одинаковые радиусы $2\pi r\cdot 4$;$=10$ $2r=\frac{5}{2\pi}<1$

2-случай. Внутри квадрата имеется одна окружность с меньшим радиусом. Предположим, что в квадрате имеются три окружности, где длина каждой из них равна трём. В этом случае, $2\pi r\cdot 3=9$, $2r=\frac{3}{\pi}<1$ и $10>3\cdot 3$. Поэтому по принципу Дирихле внутри квадрата имеется четвёртая окружность, где $r<\frac{3}{2\pi}$ Следовательно, существует прямая, пересекающая не менее четырёх из этих окружностей.

Замечание: В решении второй задачи 10 класса можно поступить по другому. Проведя через точку С прямую пораллельную прямой МД, тем самым доказываем, что угол ВРС – прямой.

А.С. Садыков. *Учитель математики Зубаирской средней школы*

Бородулихинский район

Восточно Казахстанская область.